



# Application de la théorie des jeux à l'économie publique et industrielle

Abdelhakim Hammoudi

## ► To cite this version:

Abdelhakim Hammoudi. Application de la théorie des jeux à l'économie publique et industrielle. Economies et finances. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993. Français. NNT: . tel-00520835

**HAL Id: tel-00520835**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00520835>**

Submitted on 20 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

79957

NS 16733

(4)

## THESE

en vue de l'obtention du

### DOCTORAT DE L'E.N.P.C.

Spécialité : Economie et Sciences Sociales

par

Abdelhakim HAMMOUDI

Sujet :



## APPLICATION DE LA THEORIE DES JEUX A L'ECONOMIE PUBLIQUE ET INDUSTRIELLE

Soutenue le 16 Avril 1993

Directeurs de thèse :

M. Jacques Crémer  
Mme Monique Florenzano

Directeur de recherche - CNRS  
Directeur de recherche - CNRS

Membres du jury :

Président	M. Jacques Thisse	Professeur - Université Paris I Directeur du CERAS - E.N.P.C.
Rapporteurs	M. Joseph Abdou M. Helmuth Cremer	Professeur - Université Paris I Professeur - Virginia Polytechnic Institute
Examineur	M. Gérard Ballot	Professeur - Université





**A ma famille...**  
**et à tous mes amis**



Je tiens à remercier vivement Jacques Cremer et Monique Florenzano qui ont dirigés cette thèse: leurs encouragements permanents et leur grande compétence m'ont permis de mener à bout ce travail. Je tiens à les remercier en premier lieu.

Je remercie Joseph Abdou pour avoir manifesté une attention particulière à l'évolution de mon travail et le remercie vivement d'avoir accepté d'être rapporteur.

Mes remerciements vont aussi à Helmuth Cremer qui a accepté d'être rapporteur et à Gerard Ballot pour l'intérêt qu'il a manifesté envers mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Jacques Thisse qui me fait l'honneur de présider le jury.

La deuxième partie de cette thèse a été menée en collaboration avec Eric Giraud-Heraud. Je veux ici lui exprimer le grand plaisir que j'ai eu à travailler avec lui.



## **INTRODUCTION GENERALE**

Cette thèse, dans ses deux parties distinctes se veut une contribution à la compréhension des phénomènes de coopération et des facteurs concourant à leur stabilité dans les domaines de l'Économie Publique et Industrielle. Il est ainsi utilisé à cette fin les outils classiques de théorie des jeux aussi bien coopératifs que non coopératifs.

En Économie Publique, la réussite et la stabilité d'une action collective pour le financement d'un bien public (étudiée dans la première partie) est souhaitable, puisqu'elle permet d'atteindre un niveau de production efficace (au sens de Pareto), que ne peut permettre un processus non coopératif. En revanche, les phénomènes de concentration en Économie Industrielle (étudiés dans la deuxième partie), sont en général indésirables car se faisant au détriment des intérêts du consommateur. Cela étant, que la coopération soit destinée à la production d'un bien public ou qu'elle constitue la base de la formation d'une structure de marché concentrée, les contractants sont confrontés à un même problème: la difficulté de stabilisation de l'accord eu égard à l'émergence du phénomène de "free-riding", qui met en échec la pérennité de la coopération. Ce phénomène, conséquence directe des externalités générées par tout processus de coopération (que cela soit en Économie Publique ou Industrielle), est considéré comme un facteur important d'échec des initiatives d'entente. Il est considéré par certains auteurs en Économie Industrielle (voir par exemple Stigler [1966]) comme un argument à l'encontre de tout interventionnisme étatique anti-trust. En Économie Publique, il paraît justement expliquer et justifier les fréquentes interventions de l'État du fait qu'il freine toute action de financement collective et volontaire des agents en vue d'une production collectivement suffisante de bien public.

Des questions essentielles s'imposent alors à l'analyse: ces phénomènes "bloquants" sont-ils systématiques ou dépendent-ils des caractéristiques initiales de l'économie considérée? Comment interagissent les paramètres en présence pour déterminer la réussite de la coopération? Indépendamment des natures distinctes des Économies étudiées dans les deux parties, c'est à ces questions que nous apporterons des éléments de réponses dans cette thèse.

Dans la première partie, l'analyse de l'impact des richesses initiales sur les différentes issues de jeux non-coopératifs, centre d'intérêt de récents travaux (Warr [1983], Bergstrom, Blum et Varian [1986], et Varian [1992]) est généralisée à un jeu où les joueurs sont non plus des individus isolés mais des groupes de joueurs (coalitions). Nous montrons de quelle façon les



caractéristiques de l'Économie se combinent pour déterminer les issues non-coopératives qui sont autant d'alternatives à la coopération. Nous envisageons dans un deuxième temps les problèmes liés à la coopération. Kolm [1987] souligne l'importance de la prise en compte des interactions stratégiques entre les coalitions scissionnistes. Cette idée a été appliquée par Kolm principalement au financement d'un bien public mais aussi à d'autres problèmes où la coopération génère des effets externes comme celui de la coordination internationale des politiques macro-économiques (Kolm [1989]). Nous développons sur la base de cette idée, un cadre conceptuel dans lequel peuvent s'inscrire les problèmes posés par la coopération et sa stabilité. L'instrument principal d'analyse est le coeur et quelques unes de ses extensions dues principalement à Aumann [1961] et Moulin [1981]. Nous proposons également d'autres notions de coeur spécialement adaptées à l'étude des problèmes soulevés.

Dans la deuxième partie, la question de la stabilité d'une action coopérative est posée dans un cadre de concurrence imparfaite, et plus précisément sur un marché différencié. Notre travail se situe dans le prolongement des analyses engagées dans le cadre de deux littératures, une traitant des problèmes de fusion-acquisition (par exemple, Salant, Switzer, Reynolds [1983], Deneckere, Davidson [1984, 1985]) et l'autre de cartellisation (D'Aspremont, Gabszewicz, Jacquemin et Weymark [1983]; Donsimoni [1985], Postlewaite et Roberts [1977], Ross [1992]). L'objectif principal est la mesure de l'impact d'une concurrence extérieure sur l'évolution du marché vers des structures concentrées. Nous montrons comment intervient, le nombre d'entreprises fusionnées (ou cartellisées), la différence d'exposition de ces firmes vis à vis de la concurrence extérieure, et la taille de cette dernière dans la réussite ou l'échec de la coopération. Trois facteurs de déstabilisation sont pour cela pris en compte: le "free-riding" (qui freine aussi bien les opérations de fusion que les opérations de cartellisation), la "déviation" par rapport au système de prix coopératif (s'il s'agit d'une cartellisation), et la menace d'entrée d'une nouvelle entreprise sur le marché.

#### **Mots-clés:**

**Théorie des jeux- Coeurs- Coopération- Stabilité- Bien public-  
Concentration industrielle- Free-riding.**

## **INTRODUCTION GENERALE**

### **1ere PARTIE :**

## **APPLICATION DE LA THEORIE DES JEUX AU PROBLEME DU FINANCEMENT DES BIENS PUBLICS.....1**

### **Introduction.....1**

### **Chapitre I :**

## **FINANCEMENT DE BIENS PUBLICS: CONTEXTE NON COOPERATIF .....6**

### **I.1. Equilibre de Nash à n agents.....7**

#### **I.1.1 Existence et unicité de l'équilibre .....9**

#### **I.1.2. Statique comparative..... 12**

#### **I.1.3. Redistribution des richesses et stabilité de l'équilibre..... 14**

### **I.2. Structure de coalition et équilibre de Nash.....14**

#### **I.2.1 Equilibre de Nash associé à une structure de coalitions ..... 15**

#### **I.2.2.Fonctions de meilleure réaction dans le cas d'une structure de coalitions dichotomique..... 16**

#### **I.2.3. Existence de l'équilibre de Nash..... 18**

#### **I.2.4. Propriétés de l'équilibre de Nash ..... 22**

### **I.3. Structure de coalitions dichotomique et équilibre de Stackelberg .....25**

### **I.4. Equilibre de Nash et de Stackelberg associés à une structure de coalitions dichotomique: synthèse et interprétation .....30**

## **CHAPITRE II.....35**

## **STABILITÉ D'UNE ACTION COLLECTIVE DE PRODUCTION D'UN BIEN PUBLIC .....35**

### **II.1 Cadre conceptuel.....35**

#### **II.1.1.Alpha-stabilité et bêta-stabilité ..... 37**

<b>II.1.2. Stabilité de la coopération et notion de menaces .....</b>	<b>40</b>
A- $\gamma$ -cœur.....	40
B- $\delta$ -cœur.....	41
C- Équilibres forts .....	42
<b>II.1.3. Équilibres post-scission et stabilité de la coopération:</b>	
<b>Nash-cœur et Stackelberg-cœurs.....</b>	<b>44</b>
A- Nash-cœur.....	44
B- Stackelberg-cœurs .....	44
<b>II.2. Stabilité des accords coopératifs:.....</b>	<b>46</b>
<b>II.2.1. Caractérisation des accords coopératifs et</b>	
<b>interdépendance des différentes notions de cœur.....</b>	<b>47</b>
A- Caractérisation .....	47
B- Relations d'inclusion entre les différentes notions de cœur dans le	
cas de l'économie $E_{\star}^n$ .....	48
<b>II.2.2. Équilibre de Nash post-scission et stabilité d'un accord</b>	
<b>coopératif.....</b>	<b>49</b>
A- Blocage de la coopération par une coalition .....	49
B- Analyse du cas particulier d'une répartition égalitaire des richesses	
initiales .....	53
C- Structure de coalitions dichotomique: une alternative à la	
coopération.....	55
<b>II.2.3. Équilibre de stackelberg post-scission et stabilité de</b>	
<b>l'accord coopératif.....</b>	<b>58</b>
A- Équilibre de Stackelberg et blocage de la coopération par une	
coalition "leader" .....	59
B- Analyse du cas particulier d'une répartition égalitaire des richesses	
initiales .....	60
C- Structure de coalitions dichotomique: une alternative à la	
coopération.....	62
<b>II.2.4. Menaces et stabilité de l'accord coopératif.....</b>	<b>63</b>
A- Caractérisation du $\gamma$ -cœur .....	64
B- Caractérisation du $\delta$ -cœur.....	67
C- Équilibres forts.....	70
<b>II.2.5 Illustrations numériques.....</b>	<b>72</b>
<b>ANNEXE.....</b>	<b>75</b>
<b>CHAPITRE I.....</b>	<b>75</b>
<b>CHAPITRE II.....</b>	<b>86</b>

Références .....	93
------------------	----

## **2eme PARTIE :**

Les problèmes de concentration en organisation industrielle .....	95
---	----

INTRODUCTION.....	95
-------------------	----

## **CHAPITRE III :**

FIRME MULTI-PRODUITS ET CONCURRENCE EXTERIEURE.....	100
---	-----

III.1. Cadre d'analyse .....	100
------------------------------	-----

III.2. Cas de N firmes mono-produits ( $n=1$ ) .....	102
--	-----

III.3. Firme multi-produits G et concurrence extérieure ( $n>1$ ) .....	103
---	-----

III.3.1. G connexe .....	103
--------------------------	-----

III.3.2. G non connexe .....	113
------------------------------	-----

CHAPITRE IV.....	118
------------------	-----

STABILITE DE LA COLLUSION .....	118
---------------------------------	-----

IV.1. Stabilité de la fusion.....	118
-----------------------------------	-----

Le problème du "free-riding" .....	119
------------------------------------	-----

IV.2. Stabilité des cartels.....	120
----------------------------------	-----

IV.2.1. Stabilité interne.....	124
--------------------------------	-----

A. Cas d'une configuration duopolistique: $q=1$ (ou $Fq=\{S\}$ ).....	124
---	-----

B. Cas général ( $q > 1$ ).....	129
---------------------------------	-----

IV.3. Libre entrée et stabilité.....	138
--------------------------------------	-----

IV.3.1. L'entrant rejoint la frange (Cas $q=1$ ) .....	139
--	-----

IV.3.1. L'entrant rejoint le cartel.....	146
--	-----

**Conclusion..... 150**

**ANNEXE..... 152**

**References ..... 155**

## **1ere PARTIE**

### **APPLICATION DE LA THEORIE DES JEUX AU PROBLEME DU FINANCEMENT DES BIENS PUBLICS**

#### **Introduction**

Nous analysons dans cette partie, à l'aide des outils de la théorie des jeux, les phénomènes de coopération et leur stabilité dans un contexte d'économie publique. Plus précisément, nous étudions les chances de réussite d'une action collective de toute la communauté pour le financement d'un bien collectif sans exclusion d'usage (bien public pur). La réflexion menée se situe principalement dans le prolongement des travaux de Warr [1982,1983], Kemp [1983], Bergstrom et Varian [1985], Bergstrom, Blum et Varian [1986], Kolm [1987,1988], et Varian [1992].

Dans le chapitre I, nous exposons tout d'abord le modèle classique non coopératif du financement d'un bien collectif en passant en revue quelques résultats de la littérature concernant l'existence de l'équilibre de Nash à  $n$  joueurs et ses propriétés, en fonction du vecteur des ressources initiales des agents. La contribution majeure dans ce cadre est celle de Warr [1983], dont le théorème de neutralité, a suscité un regain d'intérêt pour ce modèle (voir notamment Kemp [1983], Bergstrom et alii [1986], Bernheim [1986], Bernheim et Bagwell [1985]).

Ce théorème postule que si à l'équilibre, tous les agents participent au financement du bien public, l'allocation d'équilibre restera invariante si une redistribution (assez peu importante) des ressources initiales se produit au sein de la communauté. Ce résultat, fondamental (voir toutefois la critique récente de Fries, Golding, et Romano [1991]), a généré d'autres résultats procédant de la même problématique, à savoir la mesure de l'impact de différentes redistributions sur l'allocation d'équilibre et donc sur l'ensemble des agents apportant (à l'équilibre) une contribution positive (consommateurs-payeurs). Nous exposons quelques uns des résultats obtenus par Bergstrom et alii [1986].

Nous proposons par la suite une généralisation au cas d'un équilibre de Nash appliqué à une structure de coalitions. Les joueurs ne sont plus des individus jouant pour leur intérêt individuel, mais des coalitions déterminant chacune sa contribution au financement du bien

public. Ce modèle, est à la fois non coopératif, puisque une confrontation (de type Nash ou Stackelberg) oppose les groupes de joueurs, et coopératif, puisque la contribution unique décidée par chacun des groupes est issue d'un accord entre les membres de chacun d'entre eux. Pour mener notre étude, nous spécifions les utilités des agents, ce qui permet une analyse qui, à la différence de celle menée par Bergstrom et alii [1986] puis récemment par Varian [1992], fait dépendre les équilibres (de Nash ou de Stackelberg) non seulement de l'état initial des richesses des agents, mais également d'autres paramètres tels l'élasticité de la fonction d'utilité par rapport au bien privé (indicateur de la place occupée par ce bien dans la communauté), et de la taille des coalitions en présence. La façon dont sont réparties les consommations privées d'équilibre à l'intérieur de chacune des coalitions dépend étroitement du critère de bien-être collectif choisi par les coalitions. Nous supposons dans cette étude que les coalitions maximisent (sous contraintes) la somme des utilités individuelles de leurs membres. Nous caractérisons l'équilibre de Nash puis de Stackelberg associés à une structure de coalitions dichotomique (confrontation entre deux coalitions complémentaires). Nous comparons, à la manière de Varian [1992], les issues de Nash et de Stackelberg en fonction de la distribution initiale des richesses. Toutefois, l'originalité de notre analyse, réside dans le niveau de complexité supplémentaire généré par la multiplicité des paramètres, en particulier ceux induits par l'existence de coalitions (Varian se limite à deux joueurs), et l'élasticité des fonctions d'utilité (taux  $\mu$  que nous supposons identique pour tous les agents) donnant la disposition d'esprit de la communauté considérée vis à vis du bien privé (relativement au bien public). Notre discussion est alors naturellement orientée non seulement sur la question de l'influence des richesses initiales sur les issues d'équilibres, mais aussi sur la détermination de ces issues en fonction de tous les paramètres présents (outre le taux  $\mu$ : la taille  $n$  de l'économie, la taille des coalitions potentielles). Nous mettons en évidence la façon dont se combinent tous ces facteurs pour déterminer les quantités d'équilibre que ce soit dans un contexte de Nash ou de Stackelberg. En particulier, nous explicitons leur rôle et notamment celui de  $\mu$  (quand les autres sont fixes), dans l'apparition du phénomène du "free-riding", à savoir l'observation d'agents profitant du bien public sans participer à son financement. Nous montrons que l'équilibre de Nash se détermine en fonction de deux types de structures de coalitions dichotomiques potentielles, alors qu'à l'équilibre de Stackelberg est associée une typologie plus variée. Cette typologie dépend des valeurs prises par les paramètres, (dont le taux  $\mu$ ). Nous retrouvons au passage, un résultat obtenu par Varian [1992], à savoir la production d'une quantité plus importante de bien public dans un contexte de Nash. Nous précisons cependant, le rôle que peut jouer le taux  $\mu$  dans la coïncidence des deux équilibres (de Nash et de Stackelberg). Par ailleurs, dans un contexte de Stackelberg, nous montrons comment (toujours en fonction des paramètres cités plus haut), le free-riding de la coalition "follower" peut déboucher sur une quantité totale de bien public plus élevée que celle obtenue quand cette coalition contribue. Nous montrons dans un tel contexte, comment le free-riding de la coalition "follower" peut constituer un "moindre mal" pour certains types de coalitions "leaders". Nous terminons enfin

le chapitre I par une synthèse et une interprétation des résultats obtenus dans les deux contextes non coopératifs étudiés.

Dans le chapitre II, nous supposons que les agents décident de coopérer pour produire le bien public. La coopération présente l'avantage de déboucher sur un niveau Pareto-optimal de bien public qu'un cadre de financement non coopératif ne permet pas d'atteindre (voir par exemple Cornes et Sandler [1985] et aussi Andreoni [1988] pour le cas où le bien public représente un fond collecté au bénéfice d'une oeuvre de bienfaisance). Un accord coopératif n'est toutefois stable que si les agents ne peuvent isolément, ou en se regroupant dans des coalitions, obtenir une meilleure situation. Pour mieux préciser cette notion de stabilité, il est impératif de bien spécifier le contexte stratégique post-scission (alternative à la coopération). Cette idée, suggérée entre autres par Kolm [1987,1988], et aussi Rosenthal [1971], Shapley et Shubik [1969], permet de relativiser le résultat de Foley [1970] (confirmé entre autres, par Muench [1972] et Ellickson [1978]) donnant un coeur très large dans un contexte d'équilibre général avec biens publics<sup>1</sup>.

Le concept de coeur est un outil essentiel pour mesurer les possibilités de coopération de l'économie. Ainsi que l'a montré Kolm [1988], les résultats obtenus quant à son existence sont aussi significatifs dans le cas positif que dans le cas négatif: la non vacuité du coeur reflète la possibilité d'une coopération efficace et librement consentie, tandis que sa vacuité explique dans le cadre de l'économie positive, l'utilisation, pour atteindre la coopération, de contraintes multiples (lois, actions gouvernementales, ... ).

Pour introduire les variantes de coeurs appropriées, Kolm s'appuie sur la réponse des joueurs non-scissionnistes en terme de structure de coalitions (structure-réponse) qu'ils établissent après dénonciation unilatérale de l'accord coopératif par une coalition (les deux réponses extrêmes étant de maintenir une coopération entre eux, ou d'éclater en individus jouant indépendamment leurs stratégies). Aux différentes configurations-réponse, et aux différents types d'équilibres considérés, correspondent des notions de blocage donnant autant de variantes de la notion de coeur.

A l'instar de Kolm, nous introduisons différents concepts de stabilité. Nous fixons cependant notre attention non pas sur la structure de coalition que choisissent les joueurs en réponse à la scission de certains d'entre eux, mais sur les options stratégiques (contribution et vecteur de consommations privées) dont ils disposent quand ils maintiennent la coopération entre eux et décident de faire face conjointement à cette scission. Nous supposons donc que seule une structure de coalitions dichotomique (dont les résultats de la confrontation sont exposés dans le premier chapitre), peut constituer une alternative à la coopération. Cela nous permet d'étudier de plus près les choix stratégiques dont disposent les coalitions pour bloquer ou au contraire pour empêcher le blocage. Nous définissons alors différentes notions de coeur, les premières

---

<sup>11</sup> Pour un tels contexte, voir par exemple Kolm [1970], et les synthèses exposées par Milleron [1972], et Roberts [1974]).



inspirées principalement de Aumann [1961] et Moulin [1981] et les secondes plus directement associées au contexte de jeu post-scission. Nous étudions les relations entre ces ensembles, en prenant en compte l'influence exercée sur les résultats par notre choix du critère de bien-être collectif des coalitions (somme des utilités individuelles).

Le cadre conceptuel que nous proposons est le support d'une analyse qui nous semble essentielle et qui est d'une certaine façon le prolongement de la problématique générale du premier chapitre. Plus précisément, en passant par une inévitable spécification des utilités, nous soulevons la question de l'impact des valeurs des paramètres sur l'existence d'un accord coopératif stable, c'est à dire, la façon dont la taille des coalitions, leur richesse relative, l'élasticité de la fonction d'utilité par rapport au bien privé, interagissent pour conditionner la stabilité d'une allocation coopérative. Cela revient à déterminer les conditions de non vacuité de toutes les variantes du coeur définies précédemment.

Dans une première étape, nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un équilibre de Nash post-scission. Nous montrons que le blocage d'une coalition dans un tel cadre, dépend d'une fonction-seuil bornant supérieurement la taille relative de cette coalition. Si, en général ce seuil dépend de tous les paramètres du modèle, il dépend pour certains types de coalition uniquement du taux  $\mu$ . Pour ces coalitions, on montre en particulier, qu'il est suffisant de s'assurer de la stabilité de l'accord vis à vis du blocage des coalitions-singletons (agents isolés), car alors aucune autre coalition ne peut bloquer. Par ailleurs, nous envisageons le cas d'une économie à répartition égalitaire des richesses initiales. Nous montrons que les coalitions suffisamment riches par rapport à la coalition complémentaire, en un sens (fonction de  $\mu$ ) que nous définissons ne sont jamais bloquantes, alors que les moins riches le sont toujours. Dans ce cas, l'accord n'est stable, que si et seulement si l'économie est réduite à deux agents.

Dans une deuxième étape, nous reprenons le modèle en supposant cette fois-ci qu'un équilibre de Stackelberg prévaut après scission. Nous donnons les conditions sur les valeurs des paramètres pour que le pouvoir des coalitions augmente quand elles sont en position de leader (comparé à leur pouvoir en situation post-scission de Nash). Nous montrons que deux types de coalitions ne profitent pas de cette position de leader: les moins riches et les plus riches (là aussi, en un sens que nous définissons). Par ailleurs, si l'économie vérifie une répartition égalitaire des ressources, nous montrons que l'accord coopératif n'est stable que si deux agents sont présents et les "poids" accordés par ces derniers aux biens privés et publics sont identiques.

Dans une troisième étape, nous nous écartons des situations d'équilibres non coopératifs classiques post-scission pour envisager les différentes menaces que peuvent proférer les joueurs à l'encontre de ceux d'entre eux qui tentent de se regrouper dans une coalition bloquante. Cela nous permet de mesurer en fonction des paramètres du modèle, les capacités dissuasives des joueurs vis à vis des comportements bloquants.

Le dernier point sur lequel nous voulons insister dans cette introduction est le suivant. Le critère de bien-être choisi tant par la communauté (pour un accord coopératif) que par une coalition (dans le choix de sa stratégie post-scission) est celui d'une maximisation de la somme des utilités individuelles. Il découle de ce fait, deux interprétations possibles des résultats obtenus. Si le coeur est vide, le principe d'agrégation utilisé suffit à mettre en échec l'action collective de toute la communauté. Il peut être de ce fait accepté par les membres des coalitions bloquantes comme base de formation de ces dernières, puisqu'il contribue à améliorer leurs utilités individuelles, allant ainsi dans le sens de leur soucis d'autonomie à l'intérieur des coalitions. Si en revanche le coeur n'est pas vide, cela signifie ou bien que le type d'économie considéré (à travers ses paramètres habituels) rend possible une coopération stable, ou bien que le critère adopté par les coalitions bloquantes potentielles n'est pas adéquat. S'impose alors la question: les coalitions ne peuvent-elles pas bloquer si un autre critère judicieusement choisi pour tenir compte de la différenciation existant entre les agents (notamment par leur richesses) est adopté ? Cette question donne une idée de ce que pourrait être un développement futur du modèle.

## Chapitre I

### FINANCEMENT DE BIENS PUBLICS: CONTEXTE NON COOPERATIF

On considère dans tout ce chapitre, une économie à deux biens: un bien privé  $X$  et un bien public  $Y$ .

Un nombre  $n$  d'agents disposent de richesses initiales en bien privé  $w_i \in \mathbb{R}^+(i=1, \dots, n)$ .

Chaque agent  $i$  est consommateur du bien privé et du bien public en des quantités respectives  $x_i \in \mathbb{R}^+$  et  $y \in \mathbb{R}^+$ .

La production d'une quantité  $y$  de bien public est possible à partir de contributions  $y_i$  des agents si bien que  $y = \sum_{i=1}^n y_i$ . La consommation  $x_i$  en bien privé est simplement, pour chaque agent  $i$  la différence  $w_i - y_i$ .

Nous notons  $N = \{1, \dots, n\}$  l'ensemble de tous les agents.

Les préférences de ces consommateurs sont représentées par une fonction d'utilité  $u_i: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant l'hypothèse:

(H1)  $u_i$  est continue, strictement concave et  $u_i(0, y) = u_i(x_i, 0) = 0$

Dans le contexte non coopératif classique, le problème du choix par un agent, d'une quantité de bien privée à consommer (ou, de manière équivalente, d'un niveau de contribution), se ramène finalement au problème du choix d'une stratégie dans l'intervalle  $[0, w_i]$  (ensemble des stratégies possibles en bien privé pour l'agent  $i$ ).

Pour un vecteur de consommations privées  $(x_i)_{i \in N}$  et une production  $y$  de bien public, chaque consommateur  $i$  atteint un niveau d'utilité  $u_i(x_i, y) = u_i(x_i, \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n x_i)$ . La fonction d'utilité ainsi définie représente la fonction de gain du joueur  $i$  quand il joue une stratégie  $x_i \in [0, w_i]$ , les autres jouant chacun une stratégie  $x_j$  ( $j \in N - \{i\}$ ) sur leurs ensembles de stratégies respectifs  $[0, w_j]$ .

Dans un contexte de jeu (que nous analysons en section I.2) où certains agents se regroupent dans une coalition  $S \subset N$  afin de décider conjointement de leurs contributions, nous notons  $u_S$ , la fonction d'utilité de cette coalition et posons l'hypothèse:

$$(H1') \quad \left| \begin{array}{l} u_S((x_i)_{i \in S}, y) = \sum_{i \in S} u_i(x_i; y) \text{ (critère de bien-être collectif pour toute coalition } S) \\ \text{Avec } y \text{ égal à la quantité totale de bien public produite dans l'économie.} \end{array} \right.$$

Si la communauté est scindée en deux coalitions  $S$  et  $N-S$ , décidant chacune de sa propre contribution à la production du bien public le niveau d'utilité atteint par un agent  $i$  est alors:

$$\left| \begin{array}{l} u_i = u_i(x_i; y(S) + y(N-S)) \\ y(N-S) = \sum_{i \in N-S} w_i - \sum_{i \in N-S} x_i \text{ et } y(S) = \sum_{i \in S} w_i - \sum_{i \in S} x_i \end{array} \right.$$

### I.1. Equilibre de Nash à n agents

Dans cette section, il s'agit d'analyser le contexte où chaque agent contribue d'une façon non coopérative à la production du bien public. Ce contexte a été extensivement étudié par entre autres Warr [1983], Bergstrom et alii [1986] et Kemp [1983] (pour le cas de biens publics multiples).

Notons  $y_{-j} = \sum_{i \neq j} y_i$  la somme des contributions de tous les agents excepté  $i$ .

#### Définition I.1

Un équilibre de Nash du jeu est un vecteur de contribution  $(y_i^*)_{i=1, \dots, n}$  tel que pour tout  $i$ ,  $(x_i^*, y_i^*)$  est solution du problème de maximisation:

$$(I.1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{(x_i, y_i)} u_i(x_i, y_i + y_{-i}^*) \\ x_i + y_i = w_i \\ y_i \geq 0 \end{array} \right.$$

Chaque agent détermine donc le montant de sa contribution, et par voie de conséquence sa consommation  $x_i$  en bien privé (différence de  $w_i$  et  $x_i$ ) en maximisant son utilité, le vecteur de contribution des autres agents étant donné.

Le programme (I.1) peut s'écrire également :

$$(I.2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{(x_i, y)} u_i(x_i, y) \\ x_i + y = w_i + y_{-i}^* \\ y \geq y_{-i}^* \end{array} \right.$$

Le programme (I.2) est déduit de (I.1) par la prise en compte de l'égalité  $y_i = y - y_{-i}$ .

L'agent  $i$  choisit alors un niveau total de bien public qui maximise son utilité, la contrainte d'inégalité du programme signifiant qu'il peut choisir de ne pas contribuer c'est à dire de consommer ce qui été produit par les autres, ou alors de contribuer et donc de consommer une quantité supérieure à celle qui résulte des contributions des autres.

Comme la fonction d'utilité est supposée strictement concave, une solution du programme (I.1) ou (I.2) vérifie la propriété  $(x_i^*, y) \gg 0$ , ce qui nous permet de ne pas intégrer la contrainte  $x_i \geq 0$  dans ces programmes.

Soit  $R_i = w_i + y_{-i}^*$  et considérons le programme:

$$(I.3) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{(x_i, y)} u_i(x_i, y) \\ x_i + y = R_i \end{array} \right.$$

Ce programme est simplement celui d'un consommateur  $i$  au revenu  $R_i$  qui doit choisir le niveau de ses consommations en bien  $X$  et  $Y$ .

Appelons  $f_i(R_i)$  sa fonction de demande pour le bien public, c'est à dire la solution du programme (I.3).  $f_i$  est alors une fonction continue sur  $R^+$  (on peut le montrer en appliquant par exemple, le théorème du maximum).

La relation qui lie les programmes (I.2) et (I.3) s'écrit :

$$(I.4) \quad y = \max \{f_i(w_i + y_{-i}), y_{-i}\}$$

ou

$$(I.5) \quad y_i = \max \{f_i(w_i + y_{-i}) - y_{-i}, 0\}$$

En effet:

Soit  $\bar{y} = f_i(R_i)$  la solution du programme (I.3). Deux cas sont alors possibles:

- a) Si  $\bar{y} > y_{-i}^*$  alors  $\bar{y}$  est aussi solution du programme (I.2).
- b) Si  $\bar{y} \leq y_{-i}^*$ , appelons  $y$  la solution du problème (I.2). On va montrer que cette solution  $y$  est nécessairement égale à  $y_{-i}^*$ .

Supposons que  $y > y_{-i}^*$ , et soient  $z = (w_i - y_i, y)$ ,  $z^* = (w_i, y_{-i}^*)$  et  $v = (w_i - \bar{y}_i, \bar{y})$ .

Comme  $y > y_{-i}^*$ , alors  $u_i(z) \geq u_i(z^*)$ .

Puisque la fonction  $u_i$  est strictement concave (en fait ici la concavité seule suffit) alors:

$z^* = a v + (1-a) z$ , ( $0 \leq a \leq 1$ ), et  $u_i(z^*) \geq a u_i(v) + (1-a) u_i(z)$ .

Comme  $u_i(v) \geq u_i(z)$  et  $u_i(z) > u_i(z^*)$  (vu que  $y > y_{-i}^*$ ), alors:

$u_i(z^*) \geq a u_i(v) + (1-a) u_i(z) > u_i(z^*)$ , ce qui est impossible. Donc,  $u_i(z) \leq u_i(z^*)$ .

Etant donné que  $y$  doit être supérieur ou égal à  $y_{-i}^*$  (programme (I.2)), alors nécessairement  $z = z^*$  et donc  $y = y_{-i}^*$ .

### I.1.1 Existence et unicité de l'équilibre

En retenant la définition donnée précédemment d'un équilibre de Nash associé à notre modèle (définition I.1), nous pouvons alors énoncer le résultat:

**Proposition I.1** (Bergstrom et alii [1986])

Sous l'hypothèse (H1), l'équilibre de Nash existe.

#### Preuve

Soit:  $W = \{(y_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq y_i \leq w_i \text{ pour } i=1, \dots, n\}$

$W$  est un ensemble compact et convexe.

Considérons alors la fonction:

$$g: W \rightarrow W$$

$$(y_i)_{i=1, \dots, n} \rightarrow \left( \max \{f_i(w_i + y_{-i}) - y_{-i}, 0\} \right)_{i=1, \dots, n}$$

$g$  est une fonction continue d'un ensemble convexe et compact vers lui même, alors (théorème de Brouwer), il existe un point fixe  $(y_i^*)_{i=1,\dots,n}$ . Ce point est un équilibre de Nash du jeu précédemment défini.

□

Pour démontrer l'unicité de l'équilibre de Nash, nous introduisons l'hypothèse supplémentaire suivante sur la fonction  $f_i$ :

(H2)  $f_i$  est différentiable et  $0 < f_i'(R_i) < 1$  pour tout  $i=1,\dots,n$  (le bien public est normal)

**Proposition I.2** (Bergstrom et alii [1986])

Sous les hypothèses (H1) et (H2), l'équilibre de Nash est unique.

### Preuve

La fonction  $f_i$  est strictement croissante quelque soit  $i$  donc sa fonction inverse  $f_i^{-1}$  existe, est continue et strictement croissante (voir par exemple P. Michel [1989], p.242). Par ailleurs,  $f_i^{-1}$  est dérivable et de dérivée  $(f_i^{-1})'(y)$  égale à  $\frac{1}{f_i'(f_i^{-1}(y))}$  (P. Michel, p.258).

Considérons alors pour tout sous-ensemble  $C$  de l'ensemble des agents la fonction suivante:

$$(I.6) \quad F_C(y) = \sum_{i \in C} f_i^{-1}(y) - (c-1)y \quad \text{avec } c = |C|$$

Pour démontrer l'unicité de l'équilibre de Nash, nous énonçons puis démontrons tout d'abord le lemme suivant:

### Lemme I.1

$F_C(y)$  est une fonction différentiable, strictement croissante par rapport à  $y$  et égale à  $\sum_{i \in C} w_i$  en un équilibre de Nash,  $C$  étant l'ensemble des consommateurs-payeurs.

### Preuve

Soit  $C = \{i \in \{1,\dots,n\} / y_i > 0\}$  l'ensemble des agents qui apportent une contribution à l'équilibre de Nash  $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ .

Comme  $F_C$  est différentiable par rapport à  $y$ , on peut calculer sa dérivée. Il vient:

$$\frac{\partial F_C(y)}{\partial y} = \sum_{i \in C} (f_i^{-1})'(y) + (1-c)$$

Comme  $f_i'(R_i) < 1$  (d'après H2) alors  $(f_i^{-1})'(y) > 1$

D'où:  $\partial F_C(y)/\partial y > c + (1-c) = 1 > 0$

De plus, à l'équilibre de Nash:

$$(a) \quad y = f_i(w_i + y_{-i}) \quad \text{pour } i \in C$$

$$(b) \quad y \geq f_j(w_j + y_{-j}) \quad \text{pour } j \in C$$

En appliquant  $f_i^{-1}$  à l'équation (a), il vient:

$$(f_i^{-1})(y) = w_i + y_{-i}$$

D'où:

$$F_C(y) = \sum_{i \in C} w_i + (c-1)y - (c-1)y = \sum_{i \in C} w_i \quad \text{le lemme 1 est ainsi démontré.}$$

□

Démontrons à présent l'unicité de l'équilibre.

Pour cela, supposons que  $(y_i)_{i=1, \dots, n}$  et  $(y_i')_{i=1, \dots, n}$  soient deux équilibres de Nash dont les ensembles des consommateurs-payeurs associés sont respectivement  $C$  et  $C'$ .

Les quantités de bien public d'équilibre sont alors  $y = \sum_{i \in C} y_i$  et  $y' = \sum_{i \in C'} y_i'$ .

Posons sans perte de généralité,  $y' \leq y$ .

En appliquant la fonction inverse  $f_i^{-1}$  aux relations (a) et (b), il vient:

$$(I.7) \quad \left| \begin{array}{l} \forall i \in C, \quad f_i^{-1}(y) = w_i + y_{-i} \quad \text{et} \quad \forall i \in C, \quad f_i^{-1}(y) \geq w_i + y_{-i} \\ \forall i \in C', \quad f_i^{-1}(y') = w_i + y_{-i}' \quad \text{et} \quad \forall i \in C', \quad f_i^{-1}(y') \geq w_i + y_{-i}' \end{array} \right.$$

En procédant à une sommation sur  $C$  dans les relations (I.7), on a:

$$\sum_{i \in C} f_i^{-1}(y') \geq \sum_{i \in C} w_i + \sum_{i \in C} y_{-i} \quad \text{c'est à dire} \quad F_C(y') \geq \sum_{i \in C} w_i.$$

Comme à l'équilibre de Nash,  $F_C(y) = \sum_{i \in C} w_i$  alors  $F_C(y') \geq F_C(y)$ .

Or par hypothèse,  $y' \leq y$ , c'est à dire  $F_C(y') \leq F_C(y)$  (croissance de la fonction  $F_C$ ).



Par conséquent  $F_C(y') = F_C(y)$  et par monotonie stricte de  $F_C$  on déduit :  $y'=y$ .

Les deux ensembles  $C$  et  $C'$  sont alors égaux par construction.

□

### **I.1.2. Statique comparative**

L'objectif de cette section, est de mesurer l'impact de redistributions de richesses sur l'issue d'équilibre du jeu, particulièrement sur l'ensemble des consommateurs-payeurs et sur le niveau de bien public obtenu.

Nous donnons le lemme suivant:

**Lemme I.2** (Bergstrom et alii [1986])

Soient  $(y_i)_{i=1,\dots,n}$  et  $(y'_i)_{i=1,\dots,n}$  deux équilibres de Nash correspondant respectivement aux vecteurs de ressources initiales  $(w_i)_{i=1,\dots,n}$  et  $(w'_i)_{i=1,\dots,n}$ . Si  $C$  et  $C'$  sont respectivement les ensembles de consommateurs-payeurs qui leur sont associés, alors  $F_C(y') - F_C(y) \geq \sum_{i \in C} (w'_i - w_i)$ .

#### **Preuve**

$\forall i \in C, f_i(w'_i + y_{-i}') \leq y'$  c'est à dire  $f_i^{-1}(y') \geq w'_i + y_{-i}'$

En procédant à une sommation sur  $C$  dans les deux membres de ces inégalités, on obtient:

$$\sum_{i \in C} f_i^{-1}(y') \geq \sum_{i \in C} w'_i + \sum_{i \in C} (y' - y_i')$$

Ce qui peut s'écrire:

$$\sum_{i \in C} f_i^{-1}(y') - cy' + \sum_{i \in C} y_i' \geq \sum_{i \in C} w'_i$$

Comme  $\sum_{i \in C} y_i' \leq y'$  donc

$$\sum_{i \in C} w'_i \leq \sum_{i \in C} f_i^{-1}(y') - cy' + \sum_{i \in C} y_i' \leq \sum_{i \in C} f_i^{-1}(y') - (1-c)y'$$

Or par construction  $\sum_{i \in C} f_i^{-1}(y') - (1-c)y' = F_C(y')$  donc  $\sum_{i \in C} w'_i \leq F_C(y')$

De plus on a l'égalité  $\sum_{i \in C} w_i = F_C(y)$

conclusion:  $F_C(y') - F_C(y) \geq \sum_{i \in C} (w_i' - w_i)$

□

### Corollaire

$$(1.8) \quad \left| \begin{array}{l} \text{a) Si } \sum_{i \in C} (w_i' - w_i) = 0 \text{ alors } y \leq y' \\ \text{b) Si } \sum_{i \in C} (w_i' - w_i) > 0 \text{ alors } y < y' \end{array} \right.$$

### Preuve

(a) et (b):

La preuve de ces assertions découle directement du lemme 2.

En effet, si  $\sum_{i \in C} (w_i' - w_i) = 0$  (ou  $\sum_{i \in C} (w_i' - w_i) > 0$ ) alors, d'après le lemme:  $F_C(y') - F_C(y) \geq 0$

(resp.  $F_C(y') - F_C(y) > 0$ ).

Etant donné la croissance stricte de  $F_C$ , on déduit  $y' \geq y$  (resp.  $y' > y$ )

□

Le corollaire précédent envisage donc deux types de redistributions à l'intérieur des ressources des consommateurs-payeurs (déterminés à l'équilibre de Nash). Si la redistribution laisse invariante la richesse agrégée de l'ensemble C (c'est à dire que les transferts s'opèrent uniquement entre les membres de C), alors la nouvelle quantité de bien public obtenue à la suite de cette redistribution sera supérieure ou égale à celle obtenue initialement (avec l'ancienne configuration des richesses de C). La deuxième forme de distribution envisagée, est celle qui consiste à faire profiter l'ensemble C d'un flux de richesse provenant de l'extérieur. Autrement dit, si l'on enrichit l'ensemble C (on raisonne en richesse agrégée), alors (assertion (c)), on obtient une quantité de bien public strictement supérieure la quantité initiale. Pour augmenter la quantité de bien public d'équilibre, il suffit donc "d'enrichir" l'ensemble des agents qui contribuaient initialement, par exemple en opérant des transferts des autres agents vers ces derniers.

### **I.1.3. Redistribution des richesses et stabilité de l'équilibre**

(étude du cas:  $\sum_{i=1}^n (w_i' - w_i) = 0$ )

#### **Proposition I.2** (Bergstrom et alii [1986])

Soient  $(w_i)_{i=1,\dots,n}$  et  $(w_i')_{i=1,\dots,n}$  des vecteurs de ressources initiales vérifiant:

(c):  $\sum_{i=1}^n (w_i' - w_i) = 0$  et (d):  $[w_i' - w_i < 0 \Rightarrow |w_i' - w_i| < y_i]$

Les équilibres de Nash  $(y_i)_{i=1,\dots,n}$  et  $(y_i')_{i=1,\dots,n}$  associés respectivement à  $(w_i)_{i=1,\dots,n}$  et  $(w_i')_{i=1,\dots,n}$  vérifient alors: (e):  $y = y'$  et (f):  $y_i' = y_i + (w_i' - w_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

#### **Preuve**

Montrons tout d'abord que pour tout  $i$ ,  $y_i + (w_i' - w_i)$  est la meilleure réponse aux stratégies  $(y_j + (w_j' - w_j))_{j \neq i}$  jouées par les autres joueurs.

Après redistribution, un consommateur  $i$  intègre dans son programme la contrainte:

$$x_i + y_i' = w_i' + y_{-i}'$$

Donc  $x_i + y_i' = w_i' + \sum_{j \neq i} (y_j + w_j' - w_j) = y_{-i} + w_i$

La contrainte du problème de maximisation du consommateur est donc inchangée. La solution de ce problème restera inchangée si  $y \geq y_{-i}' = y_{-i} + w_i - w_i'$

Si  $w_i - w_i' \leq 0$  alors  $y \geq y_{-i} \geq y_{-i} + w_i - w_i'$  la solution est donc inchangée.

Si  $w_i - w_i' > 0$  alors, d'après la condition (d),  $w_i - w_i' < y_i$  et donc  $y_{-i} + w_i - w_i' < y$  la solution est inchangée.

Conclusion:  $y = y'$

□

### **I.2. Structure de coalition et équilibre de Nash**

Dans la section précédente, le contexte était celui d'un jeu non-coopératif classique dans la mesure où les joueurs sont simplement des entités individuelles jouant pour leur intérêt individuel. Le jeu peut toutefois se généraliser à des joueurs qui ne sont plus des individus mais des groupes déterminant chacun sa contribution au financement du bien public. Dans un tel jeu, qu'on analyse dans cette section, la contribution conjointement choisie par les membres de chaque groupe est alors la somme des contributions individuelles. Ce jeu présente la particularité d'être à la fois non coopératif, puisque chaque groupe agit d'une façon non

coopérative avec le monde extérieur (c'est à dire les autres groupes), et coopératif puisque la contribution unique décidée par chacun des groupe est issue d'un processus coopératif à l'intérieur de chaque groupe. Afin de mener l'analyse dans un tel contexte, il est utile d'introduire le concept de structure de coalitions.

### **I.2.1 Equilibre de Nash associé à une structure de coalitions**

On appelle structure de coalition, une partition de l'ensemble des agents. Autrement dit, c'est la donnée d'une famille  $\zeta$  de sous ensembles  $S$  de  $N$  vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{S \in \zeta} S = N \\ S \cap T = \emptyset \quad \forall S \in \zeta, \forall T \in \zeta, S \neq T \end{array} \right.$$

Dans la suite de cette section,  $\zeta = \{S_1, S_2, \dots, S_l\}$  désignera une structure donnée de coalitions.

Pour toute coalition  $S \in \zeta$ , notons  $s$  le nombre d'agents lui appartenant.

#### **Définition I.2**

On appelle ensemble des contributions possibles de la coalition  $S$ , l'ensemble:

$$(I.9) \quad Y(S) = \{y(S) \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq y(S) \leq \sum_{i \in S} w_i\}.$$

#### **Définition I.3**

Pour un niveau de contribution  $y(S)$  de la coalition  $S$ , on appelle ensemble des consommations privées possibles pour  $S$ , l'ensemble:

$$(I.10) \quad X_S^{y(S)} = \{(x_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^s / \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} w_i - y(S)\}.$$

#### **Définition I.4**

On appelle ensemble des allocations réalisables pour la coalition  $S$ , l'ensemble:

$$(I.11) \quad A(S) = \{a(S) = ((x_i)_{i \in S}; y(S)) / y(S) \in Y(S) \text{ et } (x_i)_{i \in S} \in X_S^{y(S)}\}.$$

Sous l'hypothèse (H1'), on peut définir l'équilibre de Nash associé à la structure  $\zeta$ .

L'utilité de la coalition  $S_k$  s'écrit:

$$u_{S_k} = u_{S_k}[(x_i)_{i \in S_k}, y(S_k) + \sum_{h \neq k} y(S_h)]$$

$(x_i)_{i \in S_k}$  : vecteur de consommations privées des membres de la coalition  $S_k$

$y(S_k)$ : contribution de la coalition  $S_k$  à la production du bien public.

$\sum_{h \neq k} y(S_h)$ : contribution de l'ensemble de toutes les coalitions autres que  $S_k$ .

### **Définition 1.5**

Un équilibre de Nash du jeu associé à la structure  $\zeta$  est la donnée d'un n-uplet  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  et d'un t-uplet  $(y^*(S_1), \dots, y^*(S_t))$  tels que:

$$(I.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} y^*(S_k) = \sum_{i \in S_k} w_i - \sum_{i \in S_k} x_i^* \geq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, t\} \\ \forall h \in \{1, \dots, t\}, \forall y(S_h) \in Y(S_h), \forall (x_i)_{i \in S_h} \in X_{S_h}^y: \\ u_{S_k}((x_i)_{i \in S_h}; y(S_h) + \sum_{k \neq h} y^*(S_k)) \leq u_{S_k}((x_i^*)_{i \in S_h}; y^*(S_h) + \sum_{k \neq h} y^*(S_k)) \end{array} \right.$$

L'analyse du jeu est légèrement différente de celle étudiée dans la section I.1. Ici, les joueurs sont des coalitions et la stratégie de chacune d'entre elles n'est plus un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  comme dans un contexte d'équilibre de Nash à  $n$  agents, mais un vecteur à  $s+1$  composantes dont les  $s$  premières représentent les niveaux individuels de consommation privée des membres de  $S$  et la dernière, le montant total de contribution associé.

Si la fonction d'utilité de chaque coalition ne dépend que de la somme des consommations privées des membres de la coalition et du niveau de bien public, et sous réserve que cette fonction d'utilité vérifie l'hypothèse (H1), l'équilibre de Nash existe et sous la condition de normalité du bien public, il correspond à un niveau  $z = \sum_{i \in S} x_i^*$  unique (Corollaire de la

proposition I.1 (Bergstrom et alii)). Dans le cas général, la proposition I.1 n'est pas applicable directement. Dans la section qui suit, on se bornera à étudier une structure de coalitions réduite à deux coalitions  $S$  et  $N-S$  et l'on menera l'analyse en spécifiant les fonctions d'utilités individuelles.

### **I.2.2.Fonctions de meilleure réaction dans le cas d'une structure de coalitions dichotomique**

Considérons l'économie  $E_w^{n,\mu}$  telle que  $w = (w_1, \dots, w_n)$  est le vecteur des richesses initiales et telle que l'utilité des agents soit une fonction d'utilité de la forme:

$$(I.13) \quad u_i(x_1, \dots, x_n; y) = x_i^\mu y \quad 0 < \mu \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Le paramètre  $\mu$  (supposé le même pour tous les consommateurs), traduit l'importance relative que les individus accordent au bien privé et public. Plus  $\mu$  est grand, et plus le bien privé est apprécié des agents. Si  $\mu=1$ , cela signifie que les biens privé et public jouissent d'un même crédit aux yeux des individus, c'est à dire concourent avec une égale importance à la satisfaction de ces derniers. Corrélativement, plus  $\mu$  est petit, et plus les agents apprécient (relativement) le bien public. Le cas limite ( $\mu=0$ ) reflète le contexte où les agents sont totalement indifférents au bien privé. Dans toute la suite, on prendra le cas non trivial  $\mu \neq 0$ .

Il s'agit dans cette section de caractériser l'équilibre de Nash issu de la confrontation entre une coalition  $S$  et sa complémentaire  $N-S$ .

Sous l'hypothèse (H1') et à  $y(N-S)$  donné, la coalition  $S$  détermine un vecteur  $(x_i^*)_{i \in S}$  solution du programme:

$$(I.14) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{i \in S} u_i(x_i; y(S) + y(N-S)) \\ (x_i)_{i \in S} \in X_S^{y(S)} \\ y(S) \geq 0 \end{array} \right.$$

De manière symétrique, à  $y(S)$  donné, la coalition  $N-S$  détermine un vecteur  $(x_i^*)_{i \in N-S}$  solution du programme:

$$(I.15) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{i \in N-S} u_i(x_i; W(N-S) - \sum_{i \in N-S} x_i + y(S)) \\ (x_i)_{i \in N-S} \in X_{N-S}^{y(N-S)} \\ y(N-S) \geq 0 \end{array} \right.$$

En résolvant le programme I.14, nous obtenons la fonction de meilleure réaction de la coalition S à la stratégie  $y(N-S)$  de la coalition N-S dont nous donnons l'expression dans les deux lemmes suivants:

**Lemme 3**

Quand  $\mu \neq 1$ , la fonction de meilleure réaction de la coalition S à une stratégie  $y(N-S)$  de la coalition N-S vérifie:

$$r_S: y(N-S) \rightarrow ((x_i)_{i \in N-S}, y(S))$$

$$(I.16) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Avec} \\ x_i = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W(S)+y(N-S)}{s} \quad \forall i \in S, y(S) = \frac{W(S)-\mu y(N-S)}{1+\mu} \quad \text{si } y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu} \\ x_i = \frac{W(S)}{s} \quad \forall i \in S, y(S) = 0 \quad \text{si } y(N-S) \geq \frac{W(S)}{\mu} \end{array} \right.$$

**Lemme 4**

Si  $\mu=1$ , il existe un et un seul niveau de contribution pour la coalition S constituant sa meilleure réponse à la contribution  $y(N-S)$  de N-S. Une infinité de vecteurs de consommations privées à l'intérieur de S peuvent lui être associés tout en laissant invariante l'utilité de S.

Les issues de Nash sont caractérisées par:

$$(I.17) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(S)-y(N-S)}{2} \text{ et } \sum_{i \in S} x_i = \frac{W(S)+y(N-S)}{2} \quad \text{si } y(N-S) \leq W(S) \\ y(S) = 0 \text{ et } \sum_{i \in S} x_i = W(S) \quad \text{si } y(N-S) \geq W(S) \end{array} \right.$$

**Preuves:** voir annexe.

**I.2.3. Existence de l'équilibre de Nash**

Les fonctions de réactions de chacune des coalitions étant explicitées, on peut à présent, discuter l'existence et spécifier l'équilibre de Nash en fonction des caractéristiques de la structure dichotomique donnée (taille et richesse des coalitions) et de la valeur de  $\mu$ .

Pour cela, définissons les ensembles suivants:

$$(I.18) \quad \left| \begin{array}{l} T_a(\mu) = \{S \subset N / \frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \frac{\mu}{1+\mu} \} \\ T_b(\mu) = \{S \subset N / \frac{\mu}{1+\mu} \leq \frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \frac{1+\mu}{\mu} \} \\ T_c(\mu) = \{S \subset N / \frac{W(S)}{W(N-S)} \geq \frac{1+\mu}{\mu} \} \end{array} \right.$$

Ces ensembles contiennent chacun, et pour chaque valeur de  $\mu$ , les coalitions de type (a), (b), ou (c) dont dépendra l'issue finale de Nash. On peut alors énoncer le résultat:

**Proposition I.3**

Si  $\mu \neq 1$ , l'équilibre de Nash existe, et est unique. Il est alors caractérisé par:

$$(I.19) \quad \left| \begin{array}{l} (y(S), y(N-S)) = (0, \frac{W(N-S)}{1+\mu}), x_i = \frac{W(S)}{s} \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W(N-S)}{(n-s)} \forall j \in (N-S) \quad \text{si } S \in T_a(\mu) \\ (y(S), y(N-S)) = \left( \frac{(1+\mu)W(S) - \mu W(N-S)}{1+2\mu}, \frac{(1+\mu)W(N-S) - \mu W(S)}{1+2\mu} \right) \\ x_i = \frac{\mu W}{s(1+2\mu)} \forall i \in S \quad \text{et} \quad x_j = \frac{\mu W}{(n-s)(1+2\mu)} \forall j \in N-S \quad \text{si } S \in T_b(\mu) \\ (y(S), y(N-S)) = \left( \frac{W(S)}{1+\mu}, 0 \right), x_i = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W(S)}{s} \forall i \in S, \text{ et } x_j = \frac{W(N-S)}{n-s} \forall j \in (N-S) \quad \text{si } S \in T_c(\mu) \end{array} \right.$$

**Preuve**

La justification de cette proposition découle directement du lemme 3.

En effet, la meilleure réaction de la coalition  $S$  à une stratégie  $y(N-S)$  est un vecteur  $((x_i)_{i \in S}, y(S))$  tel que (relation I.17):

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W(S) + y(N-S)}{s} \forall i \in S, y(S) = \frac{W(S) - \mu y(N-S)}{1+\mu} \quad \text{si } y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu} \\ x_i = \frac{W(S)}{s} \forall i \in S, y(S) = 0 \quad \text{si } y(N-S) \geq \frac{W(S)}{\mu} \end{array} \right.$$

Symétriquement, la coalition  $N-S$  réagit à la production  $y(S)$  de la coalition  $S$  en choisissant un vecteur  $((x_i)_{i \in N-S}, y(N-S))$  tel que:



$$(I.20) \quad \left| \begin{array}{l} x_i = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W(N-S)+y(S)}{n-s} \quad \forall i \in N-S, \quad y(N-S) = \frac{W(N-S)-\mu y(S)}{1+\mu} \quad \text{si } y(S) \leq \frac{W(N-S)}{\mu} \\ x_j = \frac{W(N-S)}{n-s} \quad \forall i \in N-S, \quad y(N-S)=0 \quad \text{si } y(S) \geq \frac{W(N-S)}{\mu} \end{array} \right.$$

Pour déduire l'issue de Nash, il suffit de résoudre le système global d'équations (I.17; I.20).

□

#### **Proposition I.4**

Si  $\mu=1$ , la quantité de bien public d'équilibre est unique tandis qu'il existe une infinité de répartition des consommations privées. Les différentes issues de Nash sont caractérisées par:

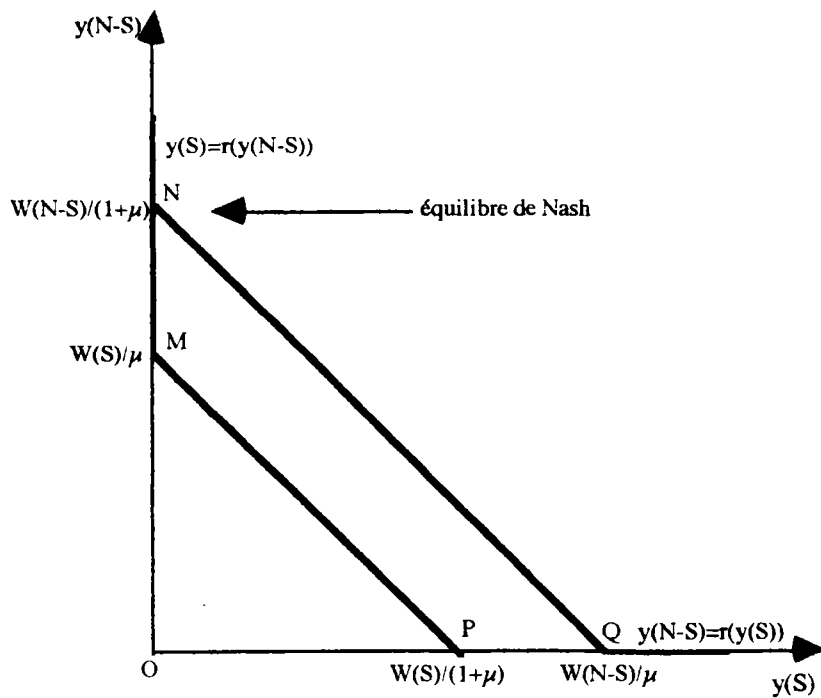
$$(I.21) \quad \left| \begin{array}{l} (y(S), y(N-S)) = \left( 0, \frac{W(N-S)}{2} \right), \quad \sum_{i \in S} x_i = W(S) \quad \text{et} \quad \sum_{i \in N-S} x_i = \frac{W(N-S)}{2} \quad \text{si } S \in T_a(1) \\ (y(S), y(N-S)) = \left( \frac{2W(S)-W(N-S)}{3}, \frac{2W(N-S)-W(S)}{3} \right), \quad \sum_{i \in S} x_i = \frac{W(S)}{3} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in N-S} x_i = \frac{W(N-S)}{3} \quad \text{si } S \in T_b(1) \\ (y(S), y(N-S)) = \left( \frac{W(S)}{2}, 0 \right), \quad \sum_{i \in S} x_i = \frac{W(S)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in N-S} x_i = W(N-S) \quad \text{si } S \in T_c(1) \end{array} \right.$$

#### **Preuve**

Pour démontrer cette proposition, il suffit de remarquer que l'utilité de la coalition  $S$  quand  $\mu=1$  est uniquement fonction de la variable  $z = \sum_{i \in S} x_i$ . Nous donnons l'intégralité de la démonstration en annexe.

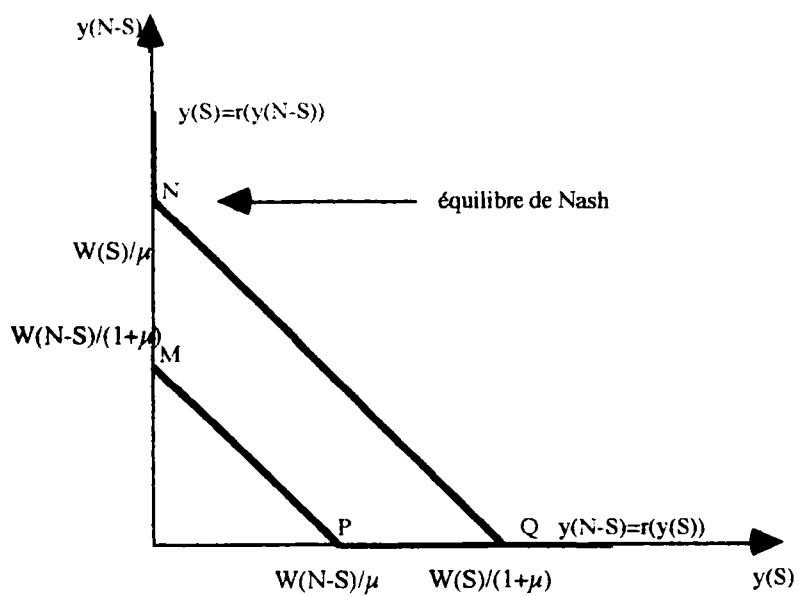
□

Les résultats précédents donnent les différentes issues de Nash possibles suivant le type de coalitions en présence et la valeur du taux  $\mu$ . On déduit entre autres, qu'un free-rider (agent profitant du bien public sans participer à son financement) est nécessairement de type (a). Si nous adoptons la terminologie proposée par Kolm [1987], nous dirons alors qu'un agent de type (a) est un free-rider "authentique" (il n'apporte aucune contribution) alors qu'un agent de type (b) est un free-rider "inauthentique" (il ne coopère pas avec les autres mais contribue d'un certain montant). On résume l'ensemble de tous ces résultats (propositions (I.3) et (I.4)), au moyen des graphiques suivants:



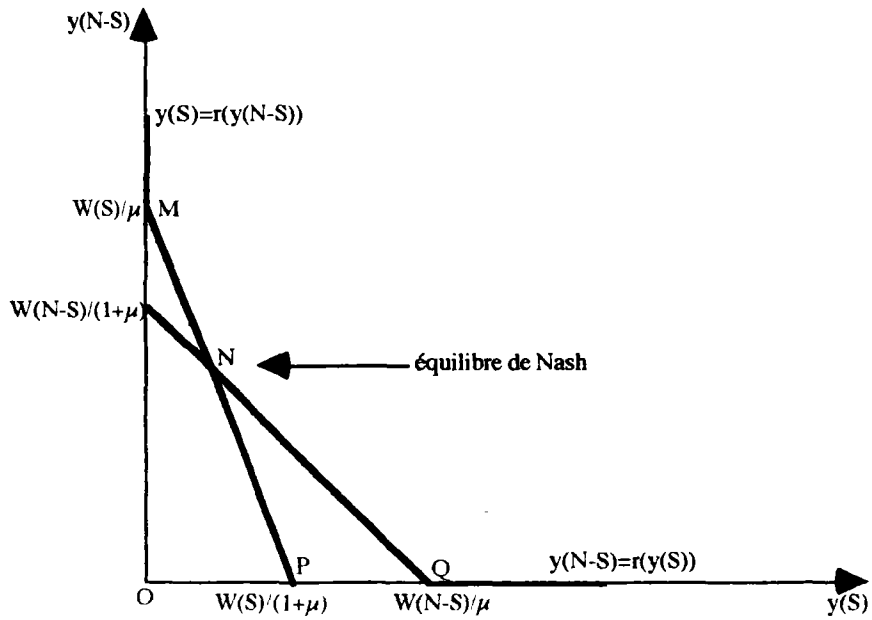
**Figure I.1**

**S de type (a):  $W(S)/W(N-S) \leq \mu/(1+\mu)$**



**Figure I.2**

**S de type (c):  $W(S)/W(N-S) \geq \mu/(1+\mu)$**



**Figure 1.3**

S de type (b):  $\mu/(1+\mu) \leq W(S)/W(N-S) \leq (1+\mu)/\mu$

#### **1.2.4. Propriétés de l'équilibre de Nash**

Pour toute la suite, on dira que la coalition S est de type (a), (respectivement (b), ou (c)), si elle appartient à l'ensemble  $T_a(\mu)$  (respectivement, à  $T_b(\mu)$ ,  $T_c(\mu)$ ). L'équilibre de Nash dépend donc du type (a), (b), ou (c) des coalitions en présence.

Il faut remarquer que le type d'une coalition S détermine celui de la coalition complémentaire N-S. Plus précisément, pour  $\mu$  fixé, les interdépendances entre le type d'une coalition et celui de la coalition complémentaire sont résumées par les relations:

$$\begin{array}{|l} S \in T_a(\mu) \Leftrightarrow (N-S) \in T_c(\mu) \\ S \in T_b(\mu) \Leftrightarrow (N-S) \in T_b(\mu) \end{array}$$

Une structure de coalition dichotomique est donc constituée soit de deux coalitions de même type (nécessairement le type (b)), soit de deux coalitions de types différents (nécessairement, les types (a) et (c)).

En définitive, à  $\mu$  fixé, l'équilibre de Nash dépendra donc de la "symétrie" ou de "l'asymétrie" observée sur la structure dichotomique donnée, la symétrie de la structure de coalition traduisant simplement le fait que les coalitions lui appartenant sont de même type, et l'asymétrie, le fait qu'elles sont de types différents. Dans toute la suite de l'analyse, on désignera par "structure de coalitions dichotomique symétrique", une structure de deux coalitions de même type (b), et par "structure dichotomique asymétrique", une structure de deux coalitions de types (a) et (c).

Par définition donc, les structures dichotomiques asymétriques contiennent nécessairement des coalitions dont les richesses agrégées ne sont pas égales. D'autre part, les structures dichotomiques contenant deux coalitions d'égales richesses sont nécessairement de type symétrique.

A  $\mu$  donné, appelons  $\sum_s^d(\mu)$ , l'ensemble de toutes les structures de coalitions dichotomiques symétriques et  $\sum_a^d(\mu)$ , l'ensemble de toutes les structures de coalitions dichotomiques asymétriques.

Prenons  $\mu_1 \in ]0,1]$ , il est immédiat que pour tout  $\zeta \in \sum_a^d(\mu_1)$ , il existe toujours une valeur  $\mu_0 < \mu_1$  telle que  $\zeta \in \sum_s^d(\mu)$  quelque soit  $\mu \leq \mu_0$ . Autrement dit, toute coalition S qui pour une valeur  $\mu_1$  de  $\mu$  ne contribuait pas à l'équilibre, le fera pour une valeur  $\mu_0$  suffisamment petite par rapport à  $\mu_1$  (et telle que  $S \subset T_a(\mu_0) \cap T_b(\mu_1)$ ). On peut résumer cela dans la remarque:

### **Remarque**

$$\forall \mu_1 \in ]0,1], \exists \mu_0 < \mu_1 \text{ tel que } \forall \mu \leq \mu_0: \sum_a^d(\mu_1) \subset \sum_s^d(\mu)$$

A présent, énonçons quelques propriétés découlant de l'équilibre de Nash spécifié dans les relations (I.19) et (I.21).

### **Propriétés**

- a)  $\forall \mu \in ]0,1], \forall \zeta \in \sum_s^d(\mu) \cup \sum_a^d(\mu), \forall S \in \zeta: W(S) > W(N-S) \Leftrightarrow y^*(S) > y^*(N-S)$
- b)  $\forall \mu \in ]0,1], \forall \zeta \in \sum_a^d(\mu), \forall S \in \zeta: W(S) > W(N-S) \Leftrightarrow y^*(S) > 0 \text{ et } y^*(N-S) = 0$
- c)  $\forall \zeta \in \sum_s^d(\mu) \cup \sum_a^d(\mu), \forall S \in \zeta, y^*(S)$  est une fonction décroissante de  $\mu$ .

Les assertions (a) et (b), dont les preuves, immédiates, découlent de la comparaison des contributions d'équilibre, établissent d'une part, que quelque soit la structure de coalition, la

coalition la plus riche est celle qui contribue le plus à la production du bien public, et d'autre part, dans l'équilibre associé à une structure "asymétrique", la coalition la plus riche est la seule à contribuer.

La différence maximale de richesse entre les coalitions d'une structure dichotomique  $\zeta \in \sum_a^d(\mu)$  dépend de la valeur de  $\mu/(1+\mu)$ . A mesure que  $\mu$  devient petit, cette différence devient importante ( $\mu/(1+\mu)$  est croissant par rapport à  $\mu$ ). Puisque, quelque soit  $\zeta \in \sum_a^d(\mu)$  la coalition la moins riche de  $\zeta$  ne contribue pas, si par exemple,  $\mu$  est au voisinage de zéro, les coalitions qui ne contribuent pas à la production de bien public sont celles et seulement celles dont les richesses sont très inférieures à la richesse de leurs complémentaires.

L'assertion (c) dit simplement que la contribution à la production du bien public décroît avec le taux  $\mu$ , ce qui revient aussi à dire que la consommation de bien privée est une fonction croissante de ce taux (celle ci est par ailleurs, pour chaque agent, décroissante par rapport la taille de la coalition à laquelle il appartient).

On peut également vérifier que la contribution d'une coalition décroît cependant plus rapidement quand la structure de coalition est asymétrique. Ainsi, et conformément à l'intuition, une configuration dichotomique quelconque produira moins de bien public (et donc consommera plus de bien privé) à mesure que  $\mu$  augmente (c'est à dire, à mesure que le bien privé est apprécié dans l'économie). Cependant, la diminution de bien public associée à la croissance de  $\mu$  s'opérera à un rythme plus rapide quand l'économie est représentée par une structure de coalition dichotomique asymétrique que symétrique.

Les membres de la coalition la plus riche d'une structure  $\zeta \in \sum_a^d(\mu)$  seront d'autant plus satisfaits d'y appartenir que leur nombre est restreint (la richesse agrégée étant fixée). Les plus satisfaits seront les agents les moins riches qui voient leur consommation privée augmenter au delà même de leur dotation initiale. Pour une telle coalition, la redistribution des revenus, qui consiste, à l'équilibre, en un transfert de bien privé des plus riches aux plus pauvres acquiert une plus grande crédibilité dans le cas par exemple où les premiers retirent un certain autre avantage (exogène au modèle) à s'allier aux seconds<sup>2</sup>.

### I.3. Structure de coalitions dichotomique et équilibre de Stackelberg

L'analyse précédente donne une idée sur la façon dont interviennent les différences de richesse entre les coalitions dans l'issue de Nash. La question qui s'impose à présent, est de savoir dans quel sens serait utilisé un état de richesse  $W(S)$  d'une coalition  $S$  si cette dernière, contrairement au cas précédent, avait un avantage stratégique sur sa concurrente. Plus précisément, si une coalition  $S$  dispose de la possibilité d'orienter sa concurrente vers une stratégie qui lui soit (à  $S$ ), la plus favorable, comment se déterminera son choix en fonction de sa richesse, de celle de sa concurrente, et de la valeur de  $\mu$ ? C'est l'objet de la présente section. Nous supposons d'une part, que la coalition  $S$  a connaissance de la fonction de meilleure réaction de la coalition  $N-S$ , et d'autre part, qu'elle a l'initiative du jeu, c'est à dire, décide la première de sa contribution. Pour choisir celle ci, elle tient compte de la réaction de la coalition complémentaire en l'intégrant dans le problème d'optimisation de sa décision.

Ecrivons  $r_{N-S}$ , la fonction de meilleure réaction de la coalition  $N-S$  à la stratégie  $y(S)$  choisie par la coalition  $S$ :

$$\begin{array}{lcl}
 r_{N-S}: & y(S) \in Y(S) & \rightarrow \\
 & & r_{N-S}[y(S)] = ((x_i)_{i \in N-S}, y(N-S)) \\
 & & \text{Avec} \\
 (I.22) & & y(N-S) \in Y(N-S), (x_i)_{i \in N-S} \in X_{N-S}^{y(N-S)} \\
 & & \text{et} \\
 & & (x_i)_{i \in N-S} = \underset{(t_i)_i}{\text{ArgMax}} u_{N-S}[(t_i)_{i \in N-S}, W(N-S) - \sum_{i \in N-S} t_i + y(S)]
 \end{array}$$

La deuxième composante  $y(N-S)$  de la fonction vectorielle  $r_{N-S}(y(S))$  représente la meilleure contribution de la coalition  $N-S$  étant donnée la contribution  $y(S)$  de  $S$ . La composante  $(x_i)_{i \in N-S}$  représente la meilleure répartition des consommations privées à l'intérieur de la coalition  $N-S$  en réponse à  $y(S)$  et pour un niveau  $y(N-S)$  de contributions de  $N-S$ .

On peut donc décomposer la fonction de meilleure réaction de  $S$  en deux composantes:

$$r_{N-S}(y(S)) = (r_{N-S}^X(y(S)), r_{N-S}^Y(y(S))) \text{ avec:}$$

$r_{N-S}^Y(y(S))$ : meilleur niveau de contribution de  $N-S$  en réponse à la contribution  $y(S)$  de  $S$ .

$r_{N-S}^X(y(S))$ : meilleur vecteur de contributions individuelles des membres de la coalition  $N-S$  en réponse à  $y(S)$ .

### **Définition I.6**

Un équilibre de Stackelberg du jeu à 2 joueurs S et N-S où S est "leader" est la donnée d'un n-uplet  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  et d'un couple  $(y^*(S), y^*(N-S))$  vérifiant les deux relations:

1)  $((x_i^*)_{i \in S}, y^*(S))$  solution du problème:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{i \in S} u_i((x_i)_{i \in S}; y(S) + r_{N-S}^Y(y(S))) \\ y(S) \in Y(S) \\ (x_i)_{i \in S} \in X_S^{y(S)} \end{array} \right.$$

2)  $y^*(N-S) = r_{N-S}^Y(y^*(S))$

On peut définir de la même façon l'équilibre de Stackelberg dans le cas symétrique où la coalition N-S est en position de "leader".

Caractérisons l'équilibre de Stackelberg sous l'hypothèse que la coalition S est leader.

On a vu dans la section I.2.2 que la meilleure réaction de la coalition N-S (en terme de bien public) à une production  $y(S)$  de la coalition S, est une production  $y(N-S)$  vérifiant :

$$(I.23) \quad y(N-S) = r_{N-S}^Y(y(S)) = \left| \begin{array}{ll} \frac{W(N-S) - \mu y(S)}{1 + \mu} & \text{si } y(S) \leq W(N-S)/\mu \\ 0 & \text{si } y(S) \geq W(N-S)/\mu \end{array} \right.$$

La coalition S a la possibilité ou bien, d'inciter la coalition N-S à contribuer en choisissant un niveau de contribution jugé insuffisant par N-S ( $y(S) < W(N-S)/\mu$ ) ou bien de contribuer suffisamment ( $y(S) > W(N-S)/\mu$ ) de sorte que N-S ne trouve plus avantage à le faire.

Une remarque immédiate: si la coalition S décide de financer elle même toute la production (c'est à dire, inciter N-S à ne pas contribuer), elle doit nécessairement contribuer d'un montant au moins supérieur à  $W(N-S)$  ( $y(S) > W(N-S)/\mu$ ). Cela n'est toutefois possible que si la coalition S a les moyens de cette politique, c'est à dire, dispose d'une richesse initiale suffisamment grande par rapport à celle de N-S. Plus précisément, il faut que:

$$W(S) \geq \frac{W(N-S)}{\mu}, \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{W(S)}{W(N-S)} \geq \frac{1}{\mu}.$$

La coalition S doit résoudre le programme (I.24) et sous réserve de la condition  $W(S) \geq W(N-S)/\mu$ , résoudre également le programme (I.25):

$$(I.24) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{i \in S} u_i(x_i ; y(N-S)+y(S)) \\ 0 \leq y(S) \leq \frac{W(N-S)}{\mu} \\ y(N-S) = \frac{W(N-S) - \mu y(S)}{1+\mu} \\ y(S) = W(S) - \sum_{i \in S} x_i \end{array} \right.$$

$$(I.25) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{i \in S} u_i(x_i ; y(N-S)+y(S)) \\ \frac{W(N-S)}{\mu} \leq y(S) \leq W(S) \\ y(N-S) = 0 \\ y(S) = W(S) - \sum_{i \in S} x_i \end{array} \right.$$

Si l'on note  $u_1$  et  $u_2$ , les niveaux d'utilité associés aux solutions des programmes (I.24) et (I.25), la coalition S choisira en définitive, les consommations privée et publiques correspondant au  $\max\{u_1, u_2\}$  quand  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \geq \frac{1}{\mu}$ , ou celles, correspondant à  $u_1$  si  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \frac{1}{\mu}$ .

Tout d'abord, énonçons le résultat concernant la stratégie de la coalition S quand  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \mu$ , c'est à dire, quand la coalition S ne dispose pas d'une richesse suffisante pour amener la coalition N-S à ne pas contribuer.



**Proposition I.5**

1) Si  $\mu \neq 1$  et  $W(S)/W(N-S) \leq \mu$ , l'équilibre de Stackelberg est caractérisé par:

$$\left| \begin{array}{l} y(S) = 0 \text{ et } y(N-S) = \frac{W(N-S)}{1+\mu} \\ x_i = \frac{W(S)}{s} \quad \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{\mu W(N-S)}{(n-s)(1+\mu)} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

2) Si  $\mu = 1$  et  $W(S)/W(N-S) \leq 1$ , l'équilibre de Stackelberg est caractérisé par:

$$\left| \begin{array}{l} y(S) = 0 \text{ et } y(N-S) = \frac{W(N-S)}{2} \\ \sum_{i \in S} x_i = W(S) \text{ et } \sum_{j \in N-S} x_j = \frac{W(N-S)}{2} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

**Preuve:** Il suffit de résoudre le programme I.24 (voir la preuve détaillée en annexe).

□

**Corollaire:**

Si la coalition la plus riche d'une structure de coalitions dichotomiques asymétrique est en position de "leader", l'équilibre de Stackelberg associé coïncide avec l'équilibre de Nash. .

**Preuve**

Il suffit de constater que si  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \mu/(1+\mu)$ , l'équilibre de Stackelberg défini dans la proposition (I.5) est précisément l'équilibre de Nash tel qu'il a été défini pour des coalitions S de type (a) (relations I.19).

□

Sous l'hypothèse  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \geq \mu$ , les contraintes du programme (I.25) deviennent compatibles.

Autrement dit, la coalition S a cette fois-ci les moyens de "contraindre" la coalition complémentaire à une contribution nulle. Encore doit elle s'assurer que cette stratégie lui est la plus avantageuse, auquel cas elle sera retenue et correspondra à sa stratégie de "leader".

Pour pouvoir conclure, nous résolvons le programme (I.25) sous l'hypothèse ci dessus. Cela nous permet de donner le résultat intermédiaire suivant:

### **Lemme 5**

1) Si  $1/\mu \leq W(S)/W(N-S) \leq 1+1/\mu$ , il y'a une plus grande quantité de bien public dans l'économie quand la coalition S choisit d'inciter la coalition N-S à contribuer. Il en est de même de la quantité de bien privé consommée par les agents de S.

2) Si  $1+1/\mu \leq W(S)/W(N-S) \leq 1+1/\mu + \mu$ , il y'a une plus grande quantité de bien public dans l'économie quand la coalition S choisit d'inciter la coalition N-S à ne pas contribuer. Par contre, la quantité de bien privé consommée par les agents de S est moindre.

### **Preuve**

La justification du lemme passe par la résolution des programme I.24 et I.25 et de la comparaison des quantités de bien public et privé qui leurs sont associés. Nous donnons en annexe la résolution complète de ces programmes.

□

Le lemme 5 explicite l'impact sur la quantité de bien public disponible dans l'économie de chacune des deux décisions de la coalition S, à savoir, faire contribuer la coalition N-S ou non. Nous allons à présent, énoncer le résultat final concernant le choix effectif de S, c'est à dire, plus précisément, l'équilibre de Stackelberg quand S a les moyens d'appliquer ces deux politiques (c'est à dire, quand  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \geq \mu$ ).

### **Proposition I.6**

1) Si  $\mu \neq 1$ ,  $\exists \mu^* \in [1+1/\mu, 1+1/\mu + \mu]$  tel que l'équilibre de Stackelberg (avec S "leader") est caractérisé par:

a) Si  $\mu \leq \frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \mu^*$

$$\left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(S) - \mu W(N-S)}{1+\mu} \text{ et } y(N-S) = \frac{(1+\mu+\mu^2)W(N-S) - \mu W(S)}{(1+\mu)^2} \\ x_i = \frac{\mu W}{s(1+\mu)} \quad \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{\mu W}{(n-s)(1+\mu)^2} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

Les deux coalitions contribuent au financement du bien public.

b)) Si  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \geq \mu^*$

$$\left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(S)}{1+\mu} \text{ et } y(N-S) = 0 \\ x_i = \frac{\mu W(S)}{(1+\mu)s} \quad \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{W(N-S)}{n-s} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

L'équilibre de Stackelberg, coïncide alors avec l'équilibre de Nash associé à la structure asymétrique et la coalition S est seule à contribuer au financement du bien public

2) Si  $\mu=1$ , les contributions d'équilibre des coalitions sont définies comme précédemment. Les répartitions associées à ces contributions constituent autant d'issues d'équilibre en bien privé.

### **Preuve**

La justification de cette proposition (que nous développons en annexe), est basée sur la comparaison des niveaux d'utilité induits par d'une part, les solutions du programmes I.24 et d'autre part, celles du programme I.25.

□

Le résultat (2) de la proposition met en exergue un cas de figure où la coalition "leader" a plutôt avantage à ne pas compter sur la contribution de la coalition complémentaire, c'est à dire avantage à financer seule la production du bien public, sa contribution s'avérant alors suffisante pour inciter N-S à ne pas contribuer.

On peut expliquer cela par le fait que la coalition S doit, pour faire contribuer N-S, réduire considérablement sa propre contribution. Elle doit de ce fait contribuer à un niveau inférieur à  $W(N-S)/\mu$ , c'est à dire à un niveau relativement bas (voir figure I.8)). Cette réduction ne pouvant être compensée par la réponse de N-S (à cause de la faiblesse des ressources de cette dernière), S est contrainte à un financement unilatéral du bien public.

#### **I.4. Equilibre de Nash et de Stackelberg associés à une structure de coalitions dichotomique: synthèse et interprétation**

Résumons puis discutons l'ensemble des résultats obtenus dans le contexte de Nash et de Stackelberg. Si nous prenons comme base d'analyse la typologie en termes de structure de coalitions induite par l'équilibre de Nash, nous pouvons résumer les issues correspondantes sur les figures I.4, I.5, I.6, I.7, et I.8.

Il est aisé de vérifier que quelque soit la structure dichotomique en présence et quelque soit la valeur du paramètre  $\mu$ , il se produit dans l'économie, une plus grande quantité de bien public dans un contexte de Nash que dans celui de Stackelberg.

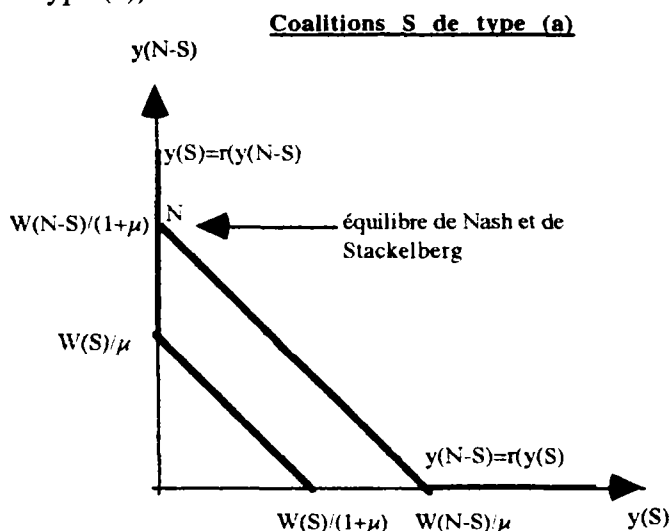
Nous menons le reste de l'analyse en discutant l'impact sur les équilibres de Nash et de Stackelberg de chacune des variables explicatives suivantes: richesse relative ( $W(S)/W(N-S)$ ) et  $\mu$ .

##### **a) Richesses relatives et équilibres**

Les figures I.4 et I.8 illustrent les cas où les équilibres de Nash et de Stackelberg coïncident. Ils correspondent à des états de richesses relatives (entre S et N-S) diamétralement opposés. Les deux équilibres ne coïncident en effet que si la coalition "leader" est soit "très pauvre", soit "très riche" par rapport à la coalition complémentaire. Dans ces deux cas de figure, l'équilibre de Stackelberg est situé sur sa courbe de meilleure réaction (coïncidant avec l'équilibre de Nash) si bien que la coalition S finance entièrement ou ne finance pas du tout le bien public

selon qu'elle est (respectivement) "trop riche" ou "trop pauvre" par rapport à la coalition complémentaire.

Il est important de noter les différences entre les typologies (en termes de coalitions) générées par les deux équilibres. Si pour une coalition de type (a), aucune autre subdivision n'est nécessitée par l'équilibre de Stackelberg, par contre, pour des coalitions de type (b) ou (c), une coalition "leader" ne réagit plus de la même manière selon qu'elle vérifie un état de richesse représenté par le cas de figure I.5 ou I.6 (si elle est de type (b)), et de même, ne réagit pas de la même manière selon que son état de richesse correspond au cas de figure I.7 ou I.8 (si elle est de type (c)).

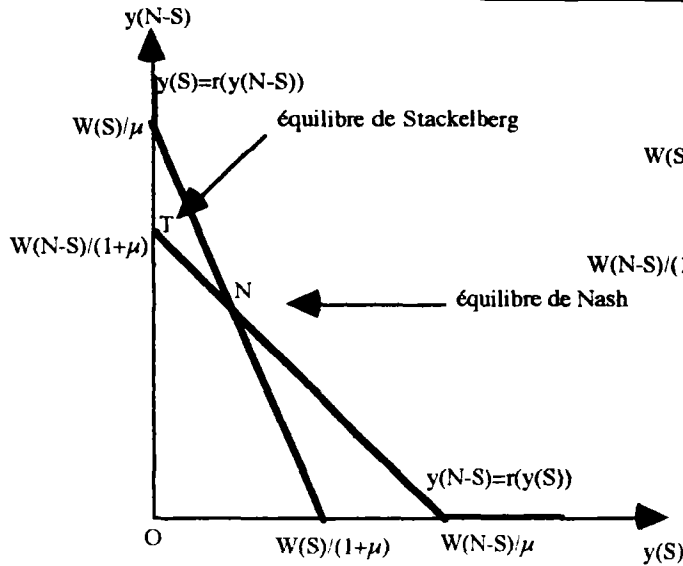


**Figure I.4**  
Cas où  $W(S)/W(N-S) \leq \mu/(1+\mu)$

Commentons le passage de la figure I.4 à I.5. Fixons une coalition S en position de "leader" par rapport à une coalition N-S. Le passage de la configuration de la figure I.4 à la configuration de la figure I.5 peut s'interpréter par exemple en supposant un accroissement exogène des richesses de la coalition S qui, initialement de type (a) se retrouvera dans la configuration de richesses de la figure I.5. Si l'équilibre de Nash change à l'issue de ce mouvement (point N), on voit bien que la coalition S ne changera pas de stratégie si elle se trouve en position privilégiée de "leader" (contribution nulle). Donc une coalition relativement "très pauvre" persistera (si elle est "leader") à ne pas contribuer tant que ses richesses ne s'accroissent pas suffisamment, le phénomène inverse étant observé en contexte de Nash.

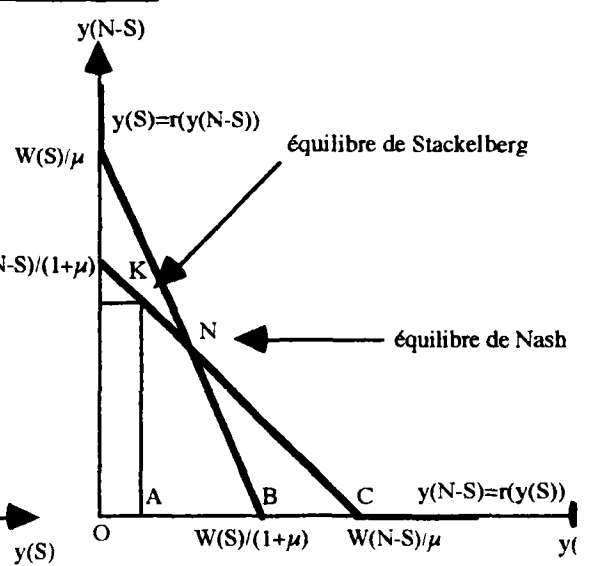
Si l'accroissement de richesse de la coalition S se poursuit jusqu'à ce que sa richesse vérifie la configuration de la figure I.6, la coalition S se mettra alors à contribuer que ce soit dans un contexte de Stackelberg ou dans un contexte de Nash, sa contribution de "leader" étant toujours inférieure à celle de Nash.

**Coalitions S de type (b)**



**Figure 1.5**

Cas où  $\mu/(1+\mu) \leq W(S)/W(N-S) \leq \mu$

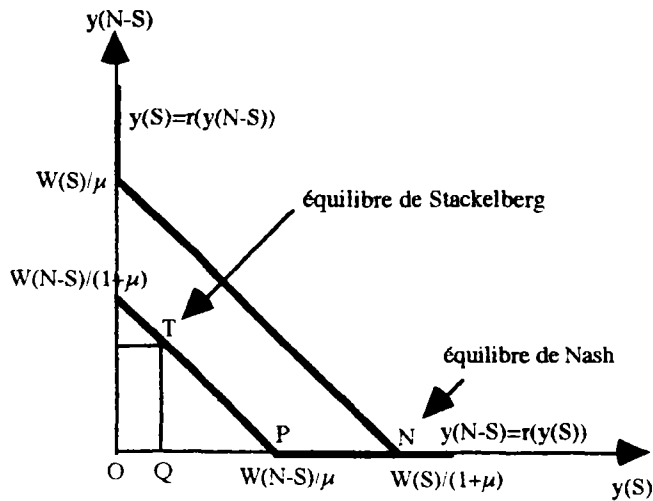


**Figure 1.6**

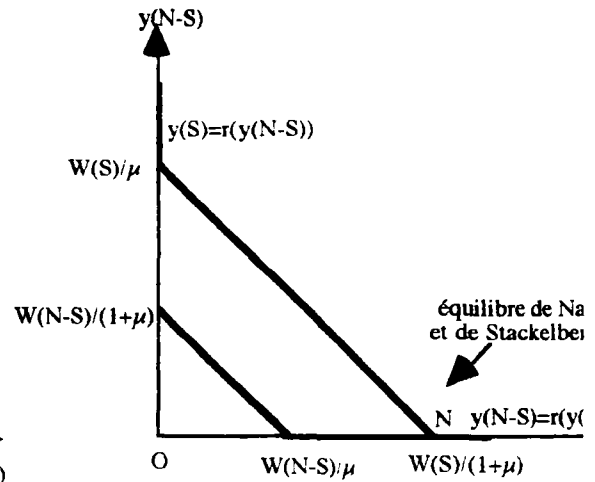
Cas où  $\mu \leq W(S)/W(N-S) \leq (1+\mu)/\mu$

Si S est de type (c), et si elle est en position de "leader" par rapport à la coalition complémentaire, il n'est pas systématique qu'elle finance à elle seule le bien public. Alors que précisément sa stratégie de Nash vérifie cette propriété, la coalition S choisira (en leader) de faire contribuer N-S jusqu'au moment où sa richesse atteint un niveau correspondant à la configuration de la figure 1.8. Autrement dit, le niveau de sa richesse à partir duquel elle adopte la décision d'un financement unilatéral, sera systématiquement plus élevé que celui associé au contexte de Nash. La coalition S attendra donc d'être beaucoup plus riche pour financer le bien public. Encore faut-il clarifier davantage cette dernière assertion. En effet, l'accroissement de richesse indispensable pour le passage de I.7 à I.8 est somme toute relativement petit (puisque  $\mu^* \in [1+1/\mu, 1+1/\mu+\mu]$ ). Ce nécessaire accroissement est d'ailleurs d'autant plus négligeable que  $\mu$  devient petit.

**Coalitions S de type (c)**



**Figure 1.7**  
Cas où  $(1+\mu)/\mu \leq W(S)/W(N-S) \leq \mu^*$



**Figure 1.8**  
Cas où  $W(S)/W(N-S) \geq \mu^*$

**b) Variation de  $\mu$  et équilibres**

A présent, fixons les richesses individuelles et faisons varier la paramètre  $\mu$ , c'est à dire plaçons nous successivement dans des économies où le bien privé est perçu selon des degrés d'importance différents. Un cas limite est celui pour lequel  $\mu$  est au voisinage de zéro, c'est à dire où l'économie est telle que les individus sont quasiment indifférent vis à vis du bien public. Dans ce cas, les structures de coalitions dichotomiques concernées par la figure I.4 et I.5 sont singulièrement "inégalitaires": une des deux coalitions est infiniment plus riche que l'autre. On peut remarquer que pour un état de richesse total  $W$  de l'économie, et une répartition donnée des richesses individuelles, on peut toujours trouver une valeur de  $\mu$  assez petite et telle qu'il n'existe pas de coalitions de type (a) (et pour raison symétrique, de type (c); voir la remarque de la section I.2.4) ni de coalition qui vérifie le cas de figure I.5. En effet, à mesure que  $\mu$  s'approche de zéro, la longueur de l'intervalle de validité de la figure I.5 (l'intervalle  $[\mu/(1+\mu), \mu]$ ) devient infinitésimal, sa borne inférieure s'approchant de zéro. Le domaine de validité de la figure I.6 ( $[\mu, (1+\mu)/\mu]$ ) est quant à lui de longueur infiniment grande. La conséquence est que si une structure dichotomique vérifie les caractéristiques de la figure I.5 pour une valeur de  $\mu$  donnée, elle ne les vérifiera plus et sera plutôt concernée par la figure I.6 pour une autre valeur de  $\mu$  suffisamment petite. La conclusion est que si  $\mu$  est pris suffisamment proche de zéro, il n'existera plus de structures de coalitions asymétriques ni même de coalitions vérifiant la configuration I.5. Les coalitions S et N-S ne peuvent donc être que de type (b) et plus précisément, du type représentée sur la figure I.6. Cela nous permet de dire que si les individus sont quasiment indifférents au bien privé, les équilibres de Nash et de Stackelberg sont représentés par la figure I.6. Par conséquent, si l'on se situe dans une

économie où les agents sont suffisamment indifférents vis à vis du bien privé, les seuls équilibres de Nash et de Stackelberg sont ceux pour lesquels toutes les coalitions apportent une contribution positive (représentés par les points N et K de la figure I.6).

Par ailleurs, les structures dichotomiques concernées par la figure I.5 seront très inégalitaires dans la mesure où une des deux coalitions est excessivement riche par rapport à sa concurrente. Il est intéressant d'observer que les structures de coalitions concernées par la figure I.6 (quand  $\mu$  est petit), génèrent un ensemble de structures des plus larges allant de la structure la plus inégalitaires (l'une des deux coalitions excessivement riche par rapport à l'autre), à la structure égalitaire (deux coalitions d'égale richesses). Pour toutes ces structures, à l'équilibre de Nash et de Stackelberg (aux points N et K), le bien public est financé par les deux coalitions. Cependant, "l'hétérogénéité" présentée par les structures de coalitions du cas de figure I.6, devient moins accentuée à mesure que  $\mu$  croît (la longueur de l'intervalle  $[\mu, (1+\mu)/\mu]$  est décroissante par rapport à  $\mu$ ).

## **CHAPITRE II**

### **STABILITÉ D'UNE ACTION COLLECTIVE DE PRODUCTION D'UN BIEN PUBLIC**

#### **II.1 Cadre conceptuel**

Le modèle de base est celui du chapitre précédent. Nous supposons l'existence de deux biens, un bien privé  $X$  et un bien public  $Y$ , et de  $n$  consommateurs (que nous regroupons dans un ensemble  $N$ ), ayant des préférences représentées par une fonction d'utilité  $u_i$  vérifiant l'hypothèse (H1) du chapitre I.

Nous supposons par ailleurs, qu'initialement, tous les agents coopèrent pour produire le bien public. Cette coopération passe par la détermination de contributions individuelles et par là-même, d'un niveau de production de bien public. Autrement dit, la communauté  $N$  détermine un vecteur de consommation en bien privé  $(x_i)_{i \in N}$  et un niveau  $y$  de production de bien public qui maximisent son utilité agrégée sous la contrainte:  $y = \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n x_i$ .

Dans tout ce chapitre, nous nous appuyons sur l'hypothèse (H1') posée dans le chapitre I:

Pour toute coalition  $S$ ,  $u_S((x_i)_{i \in S}, y) = \sum_{i \in S} u_i(x_i; y)$  est le critère de bien-être collectif de la coalition  $S$ ,  $y$  étant la quantité totale de bien public produite dans l'économie.



Par ailleurs, rappelons que pour un niveau de contribution  $y(S)$  d'une coalition  $S$  quelconque ( $S \subseteq N$ ), l'ensemble  $X_S^{y(S)}$  est appelé ensemble des consommations privées possibles de  $S$ , et est défini par:

$$X_S^{y(S)} = \{(x_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^S / \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} w_i - y(S)\}.$$

Nous pouvons dès lors, donner la définition:

### **Définition II.1**

Sous l'hypothèse (H1'), un accord coopératif  $a(N)$  est un vecteur  $((x_i)_{i \in N}, y)$  solution du problème:

$$(II.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \sum_{i=1}^n u_i(x_i; y) \\ (x_i)_{i \in N} \in X_N^y \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Un financement du bien public par toute la communauté présente l'avantage de déboucher sur une production efficace (Pareto-optimalité de l'accord  $a(N)$ ). Dès lors qu'un accord coopératif est conclu entre les agents, se pose le problème de sa viabilité. L'accord ne peut être stable si certains agents peuvent, en se regroupant au sein d'une coalition plus petite, obtenir une utilité supérieure. Il est donc nécessaire que l'accord soit robuste à toute tentative scissionniste des agents. Quand certains agents se regroupent dans une coalition  $S$  (éventuellement  $S = \{i\}$ ) pour "trahir" l'accord, on dira que la coalition  $S$  est bloquante. Si elle trahit cet accord en jouant une allocation  $a(S)$ , on dira que l'allocation  $a(S)$  bloque l'accord  $a(N)$ . Nous supposons dans toute la suite que si une coalition  $S$  bloque un accord coopératif, les autres agents maintiennent la coopération, c'est à dire réagissent de façon coopérative dans le cadre de la coalition complémentaire  $N-S$ . Autrement dit, la structure de coalitions qui prévaut après la scission de  $S$  est supposée dichotomique.

Il est d'abord impératif de préciser le contexte de jeu censé régir les comportements des joueurs après la scission provoquée par un ou plusieurs d'entre eux. De ce contexte, dépendra étroitement la stabilité de l'accord. En effet, ce dernier peut être éventuellement stable pour un

contexte post-scission donné et instable pour un autre. C'est la raison pour laquelle, nous introduisons dans les sections qui suivent, différents concepts de stabilité. Les deux premiers ( $\alpha$ -coeur et  $\beta$ -coeur) sont dus essentiellement à Aumann [1961]. Les notions de  $\gamma$ -coeur,  $\delta$ -coeur et  $\epsilon$ -coeur, que nous introduisons par la suite, traduisent l'idée d'une stabilisation d'accords au moyen de menaces particulières proférées par le reste des agents à l'encontre d'une coalition bloquante potentielle. Plus précisément, le  $\gamma$ -coeur (inspiré du  $s$ -coeur de Moulin [1981]), est l'ensemble des accords stabilisables par des menaces crédibles (meilleure réponse de la coalition complémentaire). Le  $\delta$ -coeur regroupe les accords qui ne peuvent être bloqués sans "coût" collectif pour la coalition bloquante. Cela signifie qu'aucune coalition ne peut espérer bloquer de tels accords en employant la stratégie de meilleure réponse à celle utilisée par la coalition complémentaire pour contrer le blocage. Enfin, le  $\epsilon$ -coeur est l'ensemble des équilibres forts (inspiré de Moulin [1981] et adapté à la spécificité de notre modèle). Il regroupe tous les accords pour lesquels aucune coalition ne peut changer unilatéralement de stratégie (menace "passive" de la coalition complémentaire). Dans une dernière section, nous envisageons le cas où un des équilibres non coopératifs classiques (Nash et Stackelberg) est seule alternative à la coopération, et dans ce cadre, nous définissons de nouvelles notions de coeur (le  $N$ -coeur et les  $S$ -coeurs).

### **II.1.1. Alpha-stabilité et bêta-stabilité**

On considère, pour toute coalition  $S$  ( $S \subseteq N$ ), l'ensemble  $A(S)$  des allocations réalisables par  $S$ , c'est à dire:

$$A(S) = \{a(S) = ((x_i)_{i \in S}; y(S)) / y(S) \in Y(S) \text{ et } (x_i)_{i \in S} \in X_S^{y(S)}\}$$

$$\text{avec } Y(S) = \{y(S) \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq y(S) \leq \sum_{i \in S} w_i\}.$$

Soit  $a(N)$ , une allocation réalisable quelconque appartenant à l'ensemble  $A(N)$ .

Pour une coalition quelconque  $S \subset N$ , considérons les deux types d'hypothèses:

$$(H_\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} \exists ((x_i)_{i \in S}, y(S)) \in A(S), \text{ avec:} \\ u_i(x_i; y(S) + y(N-S)) > u_i(a(N)) \quad \forall i \in S, \forall y(N-S) \in Y(N-S) \end{array} \right.$$

$$(H_\beta) \quad \left| \begin{array}{l} \forall y(N-S) \in Y(N-S), \exists ((x_i)_{i \in S}, y(S)) \in A(S) \text{ tel que:} \\ u_i(x_i, y(S)+y(N-S)) > u_i(a(N)) \quad \forall i \in S \end{array} \right.$$

Considérons alors les ensembles suivants:

$$k_\alpha(a(N)) = \{S \subset N / S \text{ vérifie } (H_\alpha)\}$$

$$k_\beta(a(N)) = \{S \subset N / S \text{ vérifie } (H_\beta)\}$$

$k_\alpha(a(N))$  (associé à une allocation  $a(N)$ ) est l'ensemble des coalitions qui disposent d'une allocation  $a(S)$  bloquant  $a(N)$  quelle que soit la réponse de la coalition complémentaire (c'est à dire quelle que soit la contribution apportée par cette dernière). Cela signifie que si  $k_\alpha(a(N))$  n'est pas vide, alors il existe au moins une coalition qui est en mesure de bloquer  $a(N)$  sans que les autres joueurs puissent l'en dissuader. A une telle coalition, est associée suffisamment de "pouvoir" pour prendre l'initiative du blocage sans se préoccuper de la réponse de la coalition complémentaire. Interprété autrement, le concept de blocage sous-tendu par la définition de l'ensemble  $k_\alpha(a(N))$ , dénote une attitude d'extrême prudence des coalitions bloquantes vis à vis de la réaction de la coalition complémentaire. En effet, une coalition qui ne décide de bloquer que dans le cadre de l'hypothèse  $(H_\alpha)$ , prévoit le "pire" pour la réaction de la coalition complémentaire.

$k_\beta(a(N))$  contient des coalitions qui disposent quelle que soit la stratégie employée par la coalition  $N-S$ , d'une réponse qui améliore l'utilité de tous leurs membres par rapport à la situation initiale  $a(N)$ . Une situation "idéale" de blocage par ce type de coalitions est bien entendu celle d'un jeu séquentiel où leur ait été offerte la possibilité d'observer la stratégie utilisée par la coalition complémentaire avant de décider de la réponse appropriée. Dans un contexte de jeu non séquentiel, on prête à ce type de coalitions bloquantes une attitude "optimiste" dans la mesure où l'initiative de blocage est prise avec l'espoir d'une issue favorable du jeu dichotomique résultant de la scission.

### **Définition II.2**

1) On désigne par  $\alpha$ -coeur, l'ensemble:

$$C_\alpha = \{ a(N) \in A(N) / k_\alpha(a(N)) = \emptyset \}$$

2) On désigne par  $\beta$ - coeur, l'ensemble:

$$C_\beta = \{ a(N) \in A(N) / k_\beta(a(N)) = \emptyset \}$$

### **Propriété**

(P<sub>1</sub>):  $C_\beta \subset C_\alpha$

La justification de cette propriété est immédiate: elle tient au fait que  $k_\alpha(a(N)) \subset k_\beta(a(N))$ .

Plaçons nous à présent sur la courbe de meilleure réponse de S à la production de la coalition complémentaire; et soit donc  $r_S$ , la fonction de meilleure réaction de S à la stratégie choisie par N-S:

$$r_S: Y(N-S) \rightarrow A(S)$$

$$y(N-S) \rightarrow r_S[y(N-S)] = ((x_i)_{i \in S}; W(S) - \sum_{i \in S} x_i)$$

avec  $(x_i)_{i \in S} = \text{Arg Max} \{ u_s[(t_i)_{i \in S}, W(S) - \sum_{i \in S} t_i + y(N-S)]; (t_i)_{i \in S} \in \prod_{i \in S} ]0, w_i] \}$

Soit alors  $R_S$ , le graphe de  $r_S$ , c'est à dire:

$$R_S = \{ (a(S), y(N-S)) \in A(S) \times Y(N-S) / a(S) = r_S[y(N-S)] \}.$$

Partant de  $R_S$ , intéressons-nous à présent, à la première composante du vecteur  $a(S)$ , c'est à dire, aux meilleures réponses en terme de contribution de S à la stratégie  $y(N-S)$  de la coalition N-S. Pour cela, définissons l'ensemble suivant:

$$R_S^Y = \{ (y(S), y(N-S)) \in Y(S) \times Y(N-S) / \exists a(S) = ((x_i)_{i \in S}; W(S) - \sum_{i \in S} x_i) \in A(S), (a(S), y(N-S)) \in R_S \}$$

Posons:

$$d_S(a(N)) = \{ (y(S), y(N-S)) \in R_S^Y / u_i[x_i; y(S) + y(N-S)] > u_i(a(N)) \quad \forall i \in S \}$$

où  $y(S) = W(S) - \sum_{i \in S} x_i$ .

On peut dès lors énoncer la proposition:

### **Proposition II.1**

1) Si pour tout  $a(N) \in A(N)$ , il existe  $S \subset N$  tel que  $R_S^Y = d_S(a(N))$  alors  $C_\beta = \emptyset$

ou de façon équivalente:

$$C_\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists a(N) \in A(N), R_S^Y - d_S(a(N)) \neq \emptyset \forall S \subset N$$

2) S'il existe  $a(N) \in A(N)$  tel que  $R_{N-S}^Y \cap d_S(a(N)) = \emptyset, \forall S \subset N$  alors  $C_\alpha \neq \emptyset$

ou de façon équivalente:

$$C_\alpha = \emptyset \Rightarrow \forall a(N) \in A(N), \exists S \subset N R_{N-S}^Y \cap d_S(a(N)) \neq \emptyset$$

Ces relations permettent d'établir un lien entre les allocations du  $\beta$ -cœur et de l' $\alpha$ -cœur et les courbes de meilleures réaction dans les différentes structures dichotomiques.

L'assertion (1) dit que si une allocation  $a(N)$  appartient au  $\beta$ -cœur, alors quelle que soit la coalition  $S$ , il existe au moins un point de  $R_S^Y$  qui n'appartient pas à  $d_S(a(N))$ . En revanche, la relation avec l' $\alpha$ -cœur joue en sens "inverse". Autrement dit, on obtient cette fois-ci (assertion (2)), une condition nécessaire de vacuité de l' $\alpha$ -cœur. Si l' $\alpha$ -cœur est vide, alors il existe une coalition  $S$  et une allocation réalisable pour cette coalition, qui améliore strictement l'utilité de tous ses membres même si la coalition complémentaire utilise sa stratégie de meilleure réponse.

### **II.1.2. Stabilité de la coopération et notion de menaces**

Nous allons nous intéresser à présent aux menaces que peut préférer la coalition complémentaire à l'encontre d'une coalition bloquante. Le champs d'investigation est ainsi étendu à toute une gamme de réponses que peut judicieusement choisir la coalition complémentaire et brandir comme autant de représailles possibles contre le blocage. Toutefois, il est nécessaire que les menaces dont elle dispose soient crédibles. Formalisons cette notion de menace crédible qui donnera lieu à une nouvelle notion de cœur inspirée de la notion de  $s$ -cœur (Moulin [1981]).

### **A- $\gamma$ -cœur**

### **Définition II.3**

Pour une coalition  $S$  donnée, on dira qu'une stratégie  $a(S) = ((x_i)_{i \in S}; y(S)) \in A(S)$  est de type  $(H\gamma)$  si on n'a pas:  $u_i(x_i; y(S) + r_{N-S}[y(S)]) > u_i(a(N)) \forall i \in S$ .

Autrement dit, une stratégie  $a(S) \in A(S)$  est de type  $(H\gamma)$  si elle peut être contrée par la meilleure réponse de la coalition complémentaire. Cette meilleure réponse constitue donc une menace crédible que peut proférer N-S à l'encontre de S.

Définissons les ensembles:

$$B_{N-S}[a(N)] = \{y(N-S) \in R_{N-S}^Y / r_S^{-1}[y(N-S)] \text{ de type } (H\gamma) \}$$

$$C_\gamma = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, \forall a(S) \in A(S), a(S) \text{ de type } (H\gamma) \}$$

ou de façon équivalente:

$$C_\gamma = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, R_{N-S}^Y = B_{N-S}[a(N)] \}$$

$B_{N-S}[a(N)]$  est l'ensemble des menaces crédibles appartenant à la courbe de meilleure réponse de la coalition N-S.  $C_\gamma$  est l'ensemble des allocations qu'on peut stabiliser par une menace crédible.

Il est évident qu'à mesure que  $B_{N-S}[a(N)]$  est large, la coalition complémentaire a les moyens de contrer un plus grand nombre de stratégies de blocage de S, et de manière crédible (meilleure réponse).

### **Propriété**

$(P_2)$ :  $C_\gamma \subset C_\alpha$

**Preuve:** La vérification est immédiate.

## **B- $\delta$ -cœur**

### **Définition II.4**

Pour une coalition S donnée, on dira qu'une contribution  $y(N-S) \in Y(N-S)$  est de type  $(H_\delta)$  si on n'a pas:  $u_i(x_i; y(S) + y(N-S)) > u_i(a(N)) \forall i \in S$ , où  $((x_i)_{i \in S}; y(S)) = r_S[y(N-S)]$ .

Autrement dit, une contribution  $y(N-S)$  est de type  $(H_\delta)$  si lorsqu'elle est jouée par la coalition N-S, elle empêche la coalition S de bloquer en utilisant sa meilleure réponse. Ce niveau de

contribution peut constituer une menace que peut proférer N-S à l'encontre de la coalition S dans le sens où cette dernière ne pourra espérer bloquer la coopération sans "coût" collectif, c'est à dire en utilisant sa meilleure réponse. Il faut remarquer cependant, que cette menace n'est crédible au sens de la définition précédente que si elle est précisément la stratégie de Nash de la coalition complémentaire (voir la propriété énoncée en section II.1.3).

Regroupons tous les niveaux  $y(N-S) \in Y(S)$  de contribution de type  $(H_\delta)$  dans un ensemble  $D_{N-S}[a(N)]$ , autrement dit:

$$D_{N-S}[a(N)] = \{y(N-S) \in Y(N-S) / y(N-S) \text{ de type } (H_\delta) \}$$

Il en résulte l'ensemble:

$$C_\delta = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, Y(N-S) \cap D_{N-S}[a(N)] \neq \emptyset \}.$$

$D_{N-S}[a(N)]$  est l'ensemble des menaces (en terme de contributions) de N-S que la coalition S ne peut contrer en utilisant sa meilleure réponse. L'ensemble  $C_\delta$  définit une nouvelle notion de stabilité (la  $\delta$ -stabilité), et c'est l'ensemble des allocations pour lesquelles la coalition complémentaire peut aligner une stratégie qui ne peut être contrée par S en utilisant sa meilleure réponse.

On peut dès lors énoncer le résultat:

### **Propriété**

$$(P_3): C_B \subset C_\delta$$

## **C- Équilibres forts**

Nous évoquons ici une notion de stabilité basée sur une menace "passive" de la coalition complémentaire. Nous adaptons alors la définition donnée par Moulin ([1981], p.85):

### **Définition II.5**

Un équilibre fort est une allocation  $a(N) = ((x_i)_{i \in N}; y) \in A(N)$  vérifiant:

$$(a) \forall i \in N, x_i \leq w_i$$

$$(b) \text{ Non } \left( \exists (x'_i)_{i \in S}; y'(S) \right) \in A(S), u_i(x'_i; y'(S) + W(N-S) - \sum_{i \in N-S} x_i) > u_i(a(N)) \quad \forall i \in S \right).$$

De par la définition, on voit bien que la menace que peut proférer la coalition complémentaire est simplement de maintenir l'allocation qui lui était impartie lors de la coopération (condition (b)). On exige toutefois que  $\forall i \in N, x_i \leq w_i$  (ou ce qui revient au même,  $\forall S \subset N, W(S) - \sum_{i \in S} x_i \geq 0$ )<sup>3</sup>. Il faut remarquer que cette dernière condition quand elle n'est pas vérifiée, c'est à dire, quand il existe  $i \in N$ , tel que  $x_i > w_i$ , signifie que l'agent  $i$  finance dans l'accord  $a(N)$  les consommations privées des autres agents. On écarte systématiquement ce type d'allocations dans la définition des équilibres forts. L'accord  $a(N)$  est alors un équilibre fort si, aucune coalition ne peut le bloquer en changeant unilatéralement de stratégie. Cela doit être en particulier vérifié d'une part, pour la coalition la plus grande  $N$ , et pour toute coalition particulière  $S = \{i\}$  ce qui nous conduit aux deux remarques:

### Remarques

- 1) Un équilibre fort est Pareto-optimal.
- 2) Tout équilibre fort est un équilibre de Nash pour le jeu à  $n$  joueurs (décrit dans la première partie du chapitre I).

Il faut noter qu'à la différence de la définition des équilibres forts donnée par Moulin [1981], nous nous restreignons donc aux accords qui n'opèrent pas de transferts de bien privé entre agents. Notre modèle impose par conséquent, de chercher les équilibres forts dans l'ensemble:

$$\bar{A}(N) = \{a(N) \in A(N) / \forall i \in N, x_i \leq w_i\}$$

Cela nous conduit à définir l'ensemble:

$$C_e = \{a(N) \in \bar{A}(N) / \forall S \subset N, \text{non} \left[ \exists ((x'_i)_{i \in S}; y'(S)) \in A(S), u_i(x'_i; y'(S) + W(N-S) - \sum_{i \in N-S} x_i) > u_i(a(N)) \forall i \in S \right] \}$$

$C_e$  est l'ensemble de tous les équilibres forts.

On peut dès lors énoncer les propriétés suivantes dont les preuves sont immédiates:

### Propriétés

$$(P_4): C_e \subset C_\delta$$

$$(P_5): C_e \subset C_\beta \text{ et donc } C_e \subset C_\alpha$$

---

<sup>3</sup> La vérification de cette condition dépend notamment du critère de bien-être collectif choisi pour la communauté  $N$ . Elle peut ne pas être vérifiée pour certaines coalitions sous l'hypothèse (H1') (voir plus loin).



### **II.1.3. Équilibres post-scission et stabilité de la coopération: Nash-coeur et Stackelberg-coeurs**

Si l'on suppose qu'une scission provoquée par une coalition  $S$  conduit à une confrontation "S contre N-S" dans le cadre d'un des équilibres classiques non coopératifs (Nash, Stackelberg), il devient alors nécessaire de définir une variante de coeur qui tienne compte de ce contexte.

#### **A- Nash-coeur**

On suppose ici que si une coalition  $S$  bloque un accord coopératif  $a(N)$ , il s'ensuit un jeu à deux joueurs ( $S$  et  $N-S$ ) dont l'issue est un équilibre de Nash. La stabilité de l'accord dépend alors du niveau d'utilité atteint par chaque agent de  $S$  à l'issue du jeu.

Nous notons, comme précédemment  $((x_i^*)_{i \in S}; y^*(S))$  l'allocation d'équilibre de Nash associée à  $S$  et  $y^*(N-S)$ , la contribution totale d'équilibre de la coalition  $N-S$ .

#### **Définition II.6**

Le Nash-coeur, est l'ensemble des allocations  $a(N)$  de  $A(N)$  telles que quelle que soit la coalition  $S$ , il existe au moins un membre  $i$  de  $S$  tel que:

$$u_i(x_i^*; y^*(S) + y^*(N-S)) \leq u_i(a(N)).$$

Formellement:

$$C_N = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, \exists i \in S, u_i(x_i^*; y^*(S) + y^*(N-S)) \leq u_i(a(N))\}$$

ou de façon équivalente, en s'appuyant sur l'ensemble  $d_S(a(N))$  précédemment défini:

$$C_N = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, (y^*(S), y^*(N-S)) \notin d_S(a(N))\}.$$

Énonçons alors la propriété suivante, dont la justification est immédiate:

#### **Propriété**

$$(P_6): C_\gamma \subset C_N \subset C_\delta$$

#### **B- Stackelberg-coeurs**

On suppose ici qu'un équilibre de Stackelberg est seule alternative à la coopération, c'est à dire qu'après scission d'une coalition  $S$ , un équilibre de Stackelberg est censé décrire le jeu qui prévaut entre les deux joueurs  $S$  et  $N-S$ .

Dans une première étape, nous supposons que c'est la coalition bloquante qui a l'initiative du jeu et se trouve en position de "leader". Nous énonçons, dans ce cas, la définition:

### **Définition II.7**

Le "Stackelberg-coeur" à coalition bloquante "leader" (noté  $C_{S_l}^l$ ) est l'ensemble des allocations  $a(N)$  de  $A(N)$  telles que quelle que soit la coalition  $S$ , il existe au moins un agent  $i$  de  $S$  tel que:  $u_i(\bar{x}_i; \bar{y}(S) + \bar{y}(N-S)) \leq u_i(a(N))$  où  $((\bar{x}_i)_{i \in S}; \bar{y}(S))$  est la stratégie de leader de  $S$  à l'équilibre de Stackelberg et  $\bar{y}(N-S)$  la contribution totale d'équilibre du follower  $N-S$ .

### **Propriété**

(P<sub>7</sub>):  $C_\gamma \subset C_{S_l}^l$

A présent, supposons que la coalition complémentaire peut anticiper la scission et jouer en leader face à la coalition bloquante  $S$ . Il s'ensuit la notion de coeur suivante:

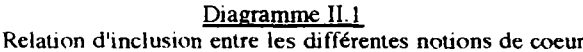
### **Définition II.8**

Le "Stackelberg-coeur" à coalition bloquante "follower" (noté  $C_{S_l}^f$ ) est l'ensemble des allocations  $a(N)$  de  $A(N)$  telles que quelle que soit la coalition  $S$ , il existe au moins un agent  $i$  de  $S$  tel que:  $u_i(\bar{x}_i; \bar{y}(S) + \bar{y}(N-S)) \leq u_i(a(N))$  où  $\bar{y}(N-S)$  est la contribution apportée par la coalition leader  $N-S$  à l'équilibre, et  $((\bar{x}_i)_{i \in S}; \bar{y}(S))$ , la stratégie jouée par  $S$  à l'équilibre de Stackelberg en position de "follower".

### **Propriété**

(P<sub>8</sub>):  $C_{S_l}^f \subset C_\delta$

Nous terminons l'exposé des différents concepts constituant le cadre d'analyse de ce chapitre, par une récapitulation des propriétés énoncées (relations d'inclusion entre les différentes notions de coeur) dans le diagramme suivant (une flèche indique une relation d'inclusion):



## II.2. Stabilité des accords coopératifs:

Considérons pour toute la suite du chapitre, le modèle  $E_w^{n, \mu}$  d'économie défini dans le chapitre I, c'est à dire:  $E_w^{n, \mu} = E [n; \mu; (x_i^\mu, y); (w_i)_{i=1, \dots, n}]$ , où  $n$  est le nombre d'agents,  $w = (w_i)_{i=1, \dots, n}$  le vecteur de leurs ressources initiales,  $\mu$  l'élasticité de la fonction d'utilité ( $0 < \mu \leq 1$ ) traduisant l'état d'esprit des agents vis à vis du bien privé, et  $u_i = x_i^\mu y$ , la fonction d'utilité d'un agent  $i$  ( $i=1, \dots, n$ ).

## II.2.1. Caractérisation des accords coopératifs et interdépendance des différentes notions de coeur

### A- Caractérisation

Soit donc la famille des utilités:

$$u_i = x_i^\mu y \quad i=1, \dots, n \quad 0 < \mu \leq 1$$

Nous supposons que la communauté cherche à financer conjointement le bien public, c'est à dire, sous l'hypothèse (H1'), résout le programme:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{i \in N} u_i(x_i; y) \\ y = \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n x_i \\ y > 0 \end{array} \right.$$

La coalition N doit déterminer donc un vecteur  $(x_1, \dots, x_n)$  qui réalise, sous la contrainte  $\sum_{i=1}^n w_i -$

$\sum_{i=1}^n x_i > 0$ , le maximum de la fonction:

$$u_N[x_1, \dots, x_n; y] = \sum_{i=1}^n x_i^\mu \left( \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Les conditions du premier ordre sont nécessaires et suffisantes (voir chapitre I). Il vient (voir détail des calculs en annexe):

a) Si  $\mu \neq 1$

$$(II.2) \quad \left| \begin{array}{l} x_i = \frac{(\mu W)}{n(1+\mu)} \quad \forall i \in N \\ y = \frac{W}{(1+\mu)} \end{array} \right.$$

La production de bien public est, conformément à l'intuition, décroissante par rapport au taux  $\mu$ . Tous les agents consomment la même quantité de bien privé, qui est croissante par rapport à

$\mu$  et décroissante par rapport à la taille de l'économie, si bien que les agents les plus riches financent d'une façon plus conséquente la production de bien public.

**b) Cas  $\mu=1$**

Dans ce cas,  $u_i=x_i.y$  et un accord coopératif  $a(N)$  est un vecteur  $(x_1,...,x_n; y)$  vérifiant:

$$(II.3) \quad \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{W}{2} \\ y = W/2 \end{array} \right.$$

Ce résultat diffère du cas  $\mu \neq 1$  dans ce qu'il permet de degrés de liberté dans la répartition des contributions à l'intérieur de la communauté.

Dans la section qui suit, nous allons nous intéresser aux conditions nécessaire et suffisantes pour qu'une coalition bloque un accord coopératif. Cela nous permettra de tirer des conclusions quant à l'existence du N-coeur. Mais tout d'abord, il est important de remarquer qu'à la lumière de la spécificité des utilités choisies, les liens unissant le N-coeur aux autres ensembles de coeur deviennent dans certains cas plus forts. Ainsi peut-on énoncer, à la suite des propriétés considérées dans la section précédente d'autres propriétés complémentaires.

**B- Relations d'inclusion entre les différentes notions de coeur dans le cas de l'économie  $E_w^{n, \mu}$**

La famille des utilités considérée ici et dans toute la suite du chapitre, est donc à la base de nouvelles propriétés qui s'ajoutent aux propriétés déjà énoncées dans la section I.1. Ces propriétés représentent autant de nouveaux liens entre les différentes notions de coeur déjà définies. Elles sont obtenues en remarquant notamment que si  $\mu \neq 1$ , tous les agents d'une coalition obtiennent le même niveau d'utilité aussi bien dans le cadre d'un accord coopératif que dans le contexte d'un jeu post scission où la stratégie de meilleure réponse est utilisée.

### Propriétés

Si  $\mu \neq 1$ , les propriétés suivantes sont vérifiées:

$$(P_{10}): C_{S_1}^l \subset C_N \subset C_\beta$$

$$(P_{11}): C_{S_1}^l = C_\gamma$$

$$(P_{12}): C_{S_1}^f \subset C_\beta$$

$$(P_{13}): C_\delta = C_\beta$$

$$(P_{14}): C_e \subseteq C_\delta \text{ (et l'égalité est vérifiée si l'on restreint } C_\delta \text{ aux allocations de } \bar{A}(N)).$$

En intégrant dans le diagramme II.1 ces nouvelles propriétés, on peut résumer l'ensemble des relations d'inclusion entre les différentes notions de coeur (associées à l'économie  $E_w^{n, \mu}$ ) dans le diagramme ci-dessous:

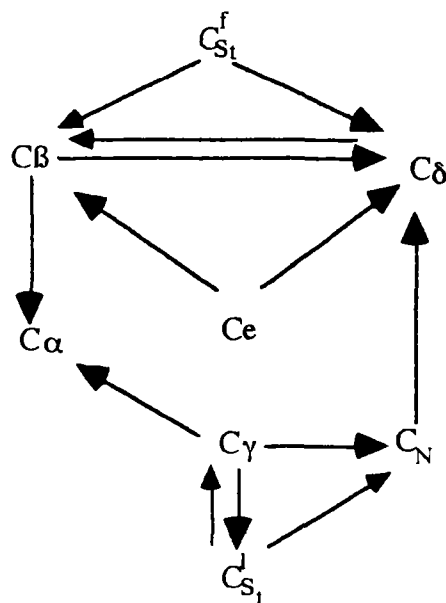


Diagramme II.2  
Relations d'inclusion dans l'économie  $E_w^{n, \mu}$

### II.2.2. Équilibre de Nash post-scission et stabilité d'un accord coopératif

#### A- Blocage de la coopération par une coalition

Tout d'abord, décrivons les coalitions susceptibles de bloquer l'accord coopératif en fonction des paramètres de notre modèle. Les coalitions candidates au blocage peuvent être de type (a), (b) ou (c). Nous allons donc analyser successivement les conditions du blocage associées à ces trois types de coalitions selon que  $\mu$  est égal ou différent de 1).

Notons  $W_r$ , le rapport des richesses agrégées des coalitions S et N-S:  $W_r = \frac{W(S)}{W(N-S)}$

### **a) Cas $0 < \mu < 1$ ( $\mu \neq 1$ )**

Nous pouvons énoncer le résultat:

#### **Proposition II.2**

$\forall S \in T_a(\mu)$ , il existe une fonction-seuil  $s_a^*(\mu, W_r)$ , croissante par rapport à  $W_r$  et décroissante par rapport à  $\mu$  telle que S bloque a(N) si et seulement si  $\frac{s}{n} < s_a^*(\mu, W_r)$ .

**Preuve:** Il suffit d'écrire la condition nécessaire et suffisante pour qu'une coalition S, de type (a) bloque l'accord coopératif a(N) (voir détail du calcul en annexe). Cette fonction-seuil s'écrira alors:

$$s_a^*(\mu, W_r) = \frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu}}$$

□

La proposition donne de façon équivalente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une coalition de type (a) ne puisse bloquer. Pour ne pas bloquer l'allocation coopérative initiale, il faut et il suffit donc que la taille relative de la coalition ne soit pas trop élevée. On peut d'ores et déjà observer que, de par la croissance de  $s_a^*(\mu, W_r)$  par rapport à  $W_r$  et de par sa borne inférieure ( $\lim s_a^*(\mu, W_r) = 0$  quand  $W_r$  tend vers 0), les coalitions de type (a) et dont la richesse relative est suffisamment petite n'auront jamais intérêt à se former (quelque soit leur taille).

Pour un nombre n d'agents et un taux  $\mu$  fixés, la croissance de  $s_a^*(\mu, W_r)$  par rapport à  $W_r$  signifie aussi, qu'une coalition S de  $T_a(\mu)$ , de taille quelconque s et qui avait avantage à bloquer, voit cet avantage se réduire à mesure que sa richesse agrégée diminue, la tendance pouvant même s'inverser.

Considérons à présent la décroissance de la fonction-seuil par rapport à  $\mu$ . Cette propriété peut s'interpréter de plusieurs façons. La première est que, toutes choses égales par ailleurs, une

coalition qui avait avantage au blocage voit cet avantage décroître à mesure que le taux  $\mu$  augmente. Il pourrait même arriver que pour une augmentation assez grande de  $\mu$ , la coalition n'ait plus intérêt au blocage. En d'autres termes, plus les agents apprécient le bien privé et moins les coalitions les moins riches (et de type (a)) sont tentées par le blocage. Cela veut dire en particulier que si l'économie est composée uniquement de coalitions de type (a) (et (c)), l'intensité du désir du bien privé est un facteur de stabilité de la coopération.

Une deuxième façon possible d'interpréter cette propriété, est de partir d'un niveau de richesse agrégée  $W(S)$  fixé. Dans ce cas, on peut dire que la taille des coalitions (de richesses  $W(S)$ ) susceptibles de bloquer la coopération diminue à mesure que le taux de substitution augmente.

Après l'analyse des capacités de blocage des coalitions de type (a), regardons à présent le cas polaire des coalitions de type (c).

### **Proposition II.3**

$\forall S \in T_c(\mu)$ , il existe une fonction-seuil  $s_c^*(\mu, W_r)$ , croissante par rapport à  $W_r$  et à  $\mu$  telle que,  $S$  bloque l'accord  $a(N)$  si et seulement si  $\frac{S}{n} < s_c^*(\mu, W_r)$ .

**Preuve:** Il suffit d'écrire la condition nécessaire et suffisante pour qu'une coalition  $S$ , de type (c) bloque l'accord coopératif  $a(N)$  (voir le développement du calcul en annexe). Il vient:

$$s_c^*(\mu, W_r) = \left( \frac{W_r}{1+W_r} \right)^{1+1/\mu}$$

Il est nécessaire de rappeler que les coalitions qui composent l'ensemble  $T_c(\mu)$  possèdent une richesse supérieure à celle de la coalition complémentaire. Cette différence de richesse devient d'ailleurs très grande à mesure que  $\mu$  devient petit. A titre d'exemple, si  $\mu=0.1$ , on exige des coalitions appartenant à  $T_c(\mu)$  d'avoir une richesse au moins 12 fois plus grande que celles de leurs complémentaires, mais si  $\mu=0.01$ , on exige d'elles une richesse au moins 102 fois supérieure! Une coalition de taille relativement petite dont la formation est inévitable dans une certaine économie peut s'avérer impossible pourvu que "l'état d'esprit" de la communauté vis à vis du bien privé soit plus "favorable" dans une autre économie (accroissement de  $\mu$ ).

La dernière catégorie de coalitions que nous allons étudier d'un point de vue du blocage sont les coalitions de types (b). Énonçons le résultat suivant:



#### **Proposition II.4**

$\forall S \in T_b(\mu)$ , il existe une fonction-seuil  $s_b^*(\mu)$ , croissante en  $\mu$  telle que  $S$  bloque  $a(N)$  si et seulement si  $\frac{s}{n} < s_b^*(\mu) = s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})$ .

**Preuve:** Il suffit d'écrire la condition nécessaire et suffisante pour qu'une coalition  $S$ , de type (b) bloque l'accord coopératif  $a(N)$  (voir calcul en annexe). Il vient:

$$s_b^*(\mu) = s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}) = \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu}$$

On remarquera que pour ce type de coalitions et contrairement aux coalitions de type (a) et (c), la profitabilité du blocage ne dépend pas du niveau des richesses relatives. Elle dépend uniquement, et à  $\mu$  fixé, de leur taille par rapport à celle de l'économie. Quand le taux  $\mu$  croît, il faut observer que le seuil  $s_b^*(\mu)$  croît, mais le nombre de coalitions de type (b) tend à diminuer (les richesses restant fixes). Il n'est donc pas exact de conclure au vu du sens de variation de  $s_b^*(\mu)$  qu'une augmentation de la valeur de  $\mu$  conduit à une augmentation du nombre des coalitions bloquantes de type (b).

#### **Corollaire II.1**

A  $\mu$  fixé, si aucun agent de type (b) ne peut bloquer l'accord  $a(N)$ , alors aucune coalition ne peut bloquer cet accord.

#### **Preuve**

Un agent bloquant  $i$  est tel que  $s=1$ . Toute coalition  $S \ni i$  vérifie:  $s > 1$ . Il est immédiat que si  $\frac{1}{n} \geq s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})$  alors  $\frac{s}{n} \geq s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})$ .

#### **2) Cas $\mu=1$**

Dans ce cas, il faut rappeler que les niveaux de contributions de deux coalitions d'une structure dichotomique ne changent pas par rapport à ceux obtenus dans l'analyse du cas  $\mu \neq 1$ . L'unique différence, se situe au niveau de la répartition des contributions à l'intérieur de chacune. Alors que les consommations privées sont réparties d'une façon égalitaire à l'intérieur de chaque coalition dans le cas où  $\mu \neq 1$ , ces consommations sont librement fixées si  $\mu=1$ . La même remarque est valable concernant l'accord coopératif  $a(N)$ .

Il s'ensuit que toute l'analyse précédente portant sur la stabilité de l'accord  $a(N)$ , reste valable pour  $\mu=1$  à condition qu'aussi bien les coalitions que la communauté adoptent pour principe de

répartir les consommations privées d'une façon égalitaire. Autrement dit, les résultats obtenus dans le cas  $\mu \neq 1$  restent valables par continuité, mais répondent uniquement ici à la question de la stabilité d'un accord égalitaire en consommations privées.

Dans cette section, nous avons énoncé des conditions nécessaires et suffisantes de blocage par, successivement, les coalitions de type (a), (b) et (c). Cela revient à déduire directement la condition nécessaire et suffisante portant sur l'économie pour que l'accord coopératif associé à  $\mu \neq 1$  (et donc l'accord coopératif "égalitaire" en consommation privées, si  $\mu = 1$ ), appartienne au Nash-coeur. On synthétisera plus loin l'ensemble de ces résultats dans leur rapport avec le N-coeur en faisant intervenir la notion de structure de coalition alternative à la coopération (sous-section D). Tout d'abord, appliquons ces résultats au cas particulier d'une économie à répartition égalitaire des ressources initiales. Cela nous permettra d'en déduire des interprétations à même de nous faire mesurer leur portée concrète.

## **B- Analyse du cas particulier d'une répartition égalitaire des richesses initiales**

Ce cas correspond donc à une économie où tous les agents disposent de richesses initiales identiques.

Posons  $w_i = w \ \forall i \in N$ . Sachant que dans ce cas,  $\forall S \subset N, W_S = \frac{s}{n-s}$ , écrivons les ensembles  $T_a(\mu)$ ,  $T_b(\mu)$ , et  $T_c(\mu)$  associés à l'équilibre de Nash issu de la confrontation de  $S$  et de  $N-S$ .

$$T_a(\mu) = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{s}{n-s} \leq \frac{\mu}{1+\mu}\} = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{s}{n} \leq \frac{\mu}{1+2\mu}\}.$$

$$T_b(\mu) = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{\mu}{1+\mu} \leq \frac{s}{n-s} \leq \frac{1+\mu}{\mu}\} = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{\mu}{1+2\mu} \leq \frac{s}{n} \leq \frac{1+\mu}{1+2\mu}\}.$$

$$T_c(\mu) = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{s}{n-s} \leq \frac{\mu}{1+\mu}\} = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{s}{n} \geq \frac{1+\mu}{1+2\mu}\}.$$

### **Lemme II.1**

$$T_a(\mu) \neq \emptyset \Leftrightarrow n \geq 2 + \frac{1}{\mu}.$$

La même condition est vraie pour  $T_c(\mu) \neq \emptyset$ .

Ce lemme est vérifiable facilement. Il suffit d'observer qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une coalition de type (a) est que tout agent de la communauté soit de type (a) (il suffit alors d'écrire cette condition).

Par ailleurs, on peut aisément vérifier les résultats suivants, immédiatement déductibles des propositions II.2, II.3, et II.4:

**Lemme II.2**

- 1- Toute coalition de type (a) est bloquante.
- 2- Les coalitions de type (c) ne peuvent jamais être bloquantes.
- 3- Les coalitions de type (b) qui ne bloquent pas  $a(N)$  sont celles dont la taille vérifie la condition:

$$(II.6) \quad \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} \leq \frac{s}{n} \leq \frac{1+\mu}{1+2\mu}$$

Le lemme dit donc, que pour être assuré de la stabilité de la coopération, il faut et il suffit que la communauté soit telle qu'elle ne renferme que des coalitions de type (b) vérifiant la condition (II.6).

**Proposition II.5**

$\forall \mu \in ]0, 1], \quad a(N) \in C_N \Leftrightarrow n=2.$

**Preuve**

Il suffit d'écrire la condition pour que dans la communauté ne soit présentes que des coalitions de type (b), et qui vérifient de plus la condition (II.6), c'est à dire:

$$n < 2 + \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad \forall S \subset N, \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} \leq \frac{s}{n} \leq \frac{1+\mu}{1+2\mu}.$$

Cette dernière condition est équivalente à:

$$\left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{n} \leq \frac{1+\mu}{1+2\mu}, \text{ d'où } n \leq \text{Min} \left\{ \left( \frac{1+2\mu}{1+\mu} \right)^{1+1/\mu}, \frac{1+2\mu}{\mu} \right\} \text{ et on peut vérifier que: } \left( \frac{1+2\mu}{1+\mu} \right)^{1+1/\mu} < \frac{1+2\mu}{\mu} \quad \forall \mu \in [0,1].$$

On peut dès lors écrire:

$$a(N) \in C_N \Leftrightarrow n \leq \left( \frac{1+2\mu}{1+\mu} \right)^{1+1/\mu}$$

Il suffit d'observer la décroissance du seuil  $\left( \frac{1+2\mu}{1+\mu} \right)^{1+1/\mu}$  par rapport à  $\mu$  et de remarquer qu'il est proche de 3 quand  $\mu$  est au voisinage de zéro (passage à la limite) et égal à  $\frac{9}{4}$  quand  $\mu$  est égal à 1, et la proposition est démontrée.

Il ressort donc de la proposition, que dans une économie où les agents ont des richesses initiales identiques, l'accord coopératif (à redistribution égalitaire des consommations privées pour le cas  $\mu=1$ ) n'est stable au sens du N-coeur que si le nombre d'agents est minimal, c'est à dire égal à 2. Ce résultat, veut simplement dire que si seuls deux agents sont en compétition, la coopération pour produire le bien public est inéluctable puisque l'équilibre de Nash (seule alternative à la coopération), donne à chacun des agents une utilité inférieure ou égale à celle obtenue dans l'accord coopératif. Par conséquent, le jeu aura systématiquement pour issue l'optimum de Pareto (l'accord coopératif).

### **C- Structure de coalitions dichotomique: une alternative à la coopération.**

Reprenons le cas général, c'est à dire celui d'un vecteur de ressources initiales quelconque. Les propositions II.2, II.3, et II.4 décrivent parmi les coalitions de types (a), (c), et (b) celles qui peuvent bloquer l'accord coopératif et donc, réciproquement, celles pour lesquelles le blocage n'est pas profitable. Il est important de déduire encore parmi ces dernières, celles dont les coalitions complémentaires sont également non bloquantes.

#### **Définition II.9**

On dira qu'une structure de coalitions dichotomique  $\{S, N-S\}$  constitue une alternative à l'accord coopératif  $(x_1, \dots, x_n; y)$  au sens du  $C_N$  si  $S$  ou  $N-S$  bloque  $(x_1, \dots, x_n; y)$  au sens du  $C_N$ .

Il nous faut remarquer qu'un accord coopératif appartient au coeur (ici le N-coeur) si et seulement si aucune structure de coalitions dichotomique ne constitue une alternative à cet accord coopératif.

La définition suggère d'exhiber parmi les structures de coalitions dichotomiques, celles qui ne peuvent être considérées comme une alternative à une action collective de financement du bien public. Autrement dit, pour quelles valeurs de  $\mu$  et pour quelles valeurs de la richesse relative, un membre au moins de chaque coalition d'une structure de coalition dichotomique, obtient à l'équilibre de Nash associé, une utilité inférieure à celle obtenue dans la coopération ?

Pour répondre à cette question, nous donnons deux résultats, le premier concernant le cas où la structure de coalitions est asymétrique, et le deuxième celui où la structure est symétrique. Ces résultats sont également valables pour le cas  $\mu=1$ , à condition, comme on l'a

précédemment souligné, que toute coalition (y compris N) adopte le principe de la répartition égalitaire de la consommation privée.

Notons:

$$(II.6) \quad s_{\text{sup}}(\mu, W_r) = \frac{(1 + W_r)^{1+1/\mu} - 1}{(1 + W_r)^{1+1/\mu}}$$

Et rappelons que: 
$$s_a^*(\mu, W_r) = \frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu}}$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante:

**Proposition II.6**

Les structures de coalitions dichotomiques asymétriques non bloquantes sont celles dont la coalition la moins riche vérifie la condition:  $\frac{S}{n} \in [s_a^*(\mu, W_r), s_{\text{sup}}(\mu, W_r)]$ . Les fonctions  $s_{\text{sup}}(\mu, W_r)$  et  $s_a^*(\mu, W_r)$  sont décroissantes par rapport à  $\mu$  et croissantes par rapport à  $W_r$ .

**Preuve:** Il suffit d'écrire, pour une structure de coalitions  $\{S, N-S\} \in \Sigma_a^d$  les conditions (propositions II.2 et II.3) pour que l'accord  $a(N)$  ne soit bloqué ni par la coalition S, ni par la coalition N-S (voir annexe).

La borne inférieure de l'intervalle  $[s_a^*(\mu, W_r), s_{\text{sup}}(\mu, W_r)]$  représente la taille relative en deçà de laquelle, toute coalition de type (a) est bloquante, et la borne supérieure, la taille au delà de laquelle toute coalition de type (a) génère une coalition complémentaire bloquante.

Sachant que:

$$(II.7) \quad \left| \begin{array}{l} s_{\text{sup}}\left(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}\right) = \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu} - 1}{\left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu}} \\ s_a^*\left(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}\right) = \left(\frac{1+\mu}{1+2\mu}\right)^{1+1/\mu} \end{array} \right.$$

nous pouvons alors énoncer le résultat:

### **Proposition II.7**

Les structures dichotomiques symétriques non bloquantes sont celles qui admettent une coalition dont la taille  $s$  vérifie:  $\frac{s}{n} \in [s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}), s_{\sup}(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})]$  où les fonctions  $s_{\sup}(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})$  et  $s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})$  sont respectivement décroissante, et croissante par rapport à  $\mu$ .

**Preuve:** Il suffit d'écrire, pour une structure de coalitions symétrique  $\{S, N-S\}$  les conditions (proposition II.4) pour que l'accord  $a(N)$  ne soit bloqué ni par la coalition  $S$ , ni par la coalition  $N-S$  (voir détail du calcul en annexe).

□

La condition de non blocage de l'accord par des structures de coalitions dichotomiques symétriques ne dépend pas des richesses agrégées des coalitions composant les structures candidates au blocage.

Il faut remarquer que si la communauté  $N$  est composée d'agents ayant mêmes richesses initiales, on peut vérifier que la condition de la proposition (II.7) n'est jamais vérifiée; ce qui est en accord avec le résultat énoncé dans le lemme II.2, qui stipule que les coalitions de type (a) sont toujours bloquantes.

### **Remarque**

Les structures de coalitions dichotomiques symétriques dont la taille relative des coalitions est suffisamment petite (ou symétriquement, suffisamment grande) vont se substituer à l'accord  $a(N)$ .

### **Preuve**

Elle découle directement des variations des fonctions  $s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})$  et  $s_{\sup}(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})$  par rapport à  $\mu$ . En effet, on déduit que l'intervalle  $[s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}), s_{\sup}(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})]$  de longueur maximale est donnée pour les valeurs limite des bornes quand  $\mu$  tend vers 0.

On vérifie que:  $\lim_{\mu \rightarrow 0} s_{\sup}(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}) = 1 - 1/e (= 0.63)$  (quand  $\mu \rightarrow 0$ ) et  $\lim_{\mu \rightarrow 0} s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}) = 1/e (= 0.37)$  (quand  $\mu \rightarrow 0$ ).

L'intervalle de longueur minimale est donné pour la valeur  $\mu=1$  des bornes, c'est à dire:  $s_{\sup}(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}) = \frac{5}{9}$  et  $s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}) = \frac{4}{9}$ . Les assertions (1) et (2) du corollaire sont alors immédiates.

Les résultats énoncés dans les propositions II.5 et II.6 fournissent la condition nécessaire et suffisante pour qu'un accord coopératif appartienne au N-coeur. Cette condition synthétique

porte sur l'état initial des richesses de la communauté. L'ensemble  $\Sigma_{\theta}^d$ , désigne quand  $\theta = s$  l'ensemble de toutes les structures dichotomiques symétriques possibles à partir de  $N$  et quand  $\theta = a$ , l'ensemble de toutes les structures dichotomiques asymétriques possibles. Nous pouvons alors conclure:

**Proposition II.8**

$a(N) \in C_N$  si et seulement si  $\forall \zeta = \{S, N-S\} \in \Sigma_{\theta}^d$ , on a:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{s}{n} \in [s_a^*(\mu, W_r), s_{sup}(\mu, W_r)] \text{ si } \theta = a \text{ et } S \in T_a(\mu) \\ \text{ou} \\ \frac{s}{n} \in [s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}), s_{sup}(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})] \text{ si } \theta = s \text{ et } S \in T_b(\mu) \end{array} \right.$$

**Preuve**

Il suffit uniquement de synthétiser les résultats déjà énoncés dans les propositions II.6 et II.7.

**II.2.3. Équilibre de stackelberg post-scission et stabilité de l'accord coopératif**

Nous allons examiner les capacités de blocage d'une coalition quand elle se trouve dans une position de "leader" de Stackelberg. Cette analyse prend un sens plus pertinent après comparaison des résultats avec ceux obtenus dans un contexte de Nash. Plus précisément, il s'agit de voir pour quelles types de coalitions cet avantage stratégique apporte un surplus de pouvoir (scissionniste). Nous nous intéresserons donc aux coalitions qui n'avaient pas avantage à bloquer la coopération dans le contexte post-scission de Nash, et qui, deviennent bloquantes dès qu'elles bénéficient des privilèges classiques inhérents à la position de "leader". Nous caractériserons ces coalitions en fonction de leurs richesses, de leurs tailles et discuterons les changements observés suite aux variations du paramètre  $\mu$ .

## **A- Équilibre de Stackelberg et blocage de la coopération par une coalition "leader"**

Rappelons les expressions suivantes définies précédemment:

$$s_{\text{sup}}(\mu, W_r) = \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu} - 1}{\left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu}}$$

$$s_a^*(\mu, W_r) = \frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu}}$$

$$s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}) = \left(\frac{1+\mu}{1+2\mu}\right)^{1+1/\mu}$$

$$s_c^*(\mu, W_r) = \left(\frac{W_r}{1+W_r}\right)^{1+1/\mu}$$

Nous donnons alors les résultats:

### **Proposition II.8**

1) Si S est une coalition de type (a) alors, S bloque l'accord coopératif a(N) à l'équilibre de Nash post-scission si et seulement si elle bloque l'accord a(N) à l'équilibre de Stackelberg post-scission (en "leader").

2) Les coalitions S de type (b) non bloquantes à l'équilibre de Nash post-scission mais bloquantes en position de "leader" de Stackelberg sont telles que:

$$(II.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}) \leq \frac{s}{n} \leq s_a^*(\mu, W_r) \quad \text{si} \quad \frac{\mu}{1+\mu} \leq W_r \leq \mu \\ \text{b) } s_a^*(\mu, \frac{\mu}{1+\mu}) \leq \frac{s}{n} \leq s_a^*(\mu, \mu) \quad \text{si} \quad \mu \leq W_r \leq \frac{1+\mu}{\mu} \end{array} \right.$$

3) Si une coalition S est de type (c), deux cas sont alors possibles:

a) Si  $\frac{1+\mu}{\mu} \leq W_r \leq \mu^*$ , la coalition S ne bloque pas à l'équilibre de Nash post-scission mais bloque en position de "leader" de Stackelberg si et seulement si:

$$(II.9) \quad s_c^*(\mu, W_r) \leq \frac{s}{n} \leq s_a^*(\mu, \mu)$$

b) Si  $W_r \geq \mu^*$  ( $\mu^* \in [\frac{1+\mu}{\mu}, \frac{1+\mu}{\mu} + \mu]$ , valeur induite par l'équilibre de Stackelberg<sup>4</sup>), alors S bloque l'accord coopératif a(N) à l'équilibre de Nash post-scission si et seulement si elle bloque l'accord a(N) à l'équilibre de Stackelberg post-scission (en "leader").

### **Preuve**

---

<sup>4</sup>Voir caractérisation de l'équilibre de Stackelberg (chapitre I).



Immédiate: il suffit d'écrire les conditions de non blocage en équilibre de Nash et de blocage en équilibre de Stackelberg en se référant aux résultats obtenus dans ces deux contextes par rapport à chaque type de coalition.

□

Conformément à l'intuition, on observe que le pouvoir de blocage des coalitions augmente globalement quand elles sont "leader" de Stackelberg (comparé à leur pouvoir dans une situation post-scission de Nash). Ce résultat dépend cependant de la taille des coalitions considérées. Par ailleurs, deux types de coalitions ne profitent pas de cette position de leader: les coalitions de type (a) et les coalitions "les plus riches" parmi celles de type (c).

### **B- Analyse du cas particulier d'une répartition égalitaire des richesses initiales**

Nous allons, dans cette section, appliquer les résultats généraux trouvés et énoncés précédemment à une économie où tous les agents disposent de richesses initiales identiques.

Rappelons qu'alors les ensembles  $T_a(\mu)$ ,  $T_b(\mu)$ , et  $T_c(\mu)$  peuvent être explicités simplement au moyen de la taille relative des coalitions:

$$T_a(\mu) = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{s}{n} \leq \frac{\mu}{1+2\mu} \}$$

$$T_b(\mu) = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{\mu}{1+2\mu} \leq \frac{s}{n} \leq \frac{1+\mu}{1+2\mu} \}$$

$$T_c(\mu) = \{S \subset N \text{ telles que } \frac{s}{n} \geq \frac{1+\mu}{1+2\mu} \}.$$

On déduit de l'assertion (1) de la proposition II.8 que le résultat concernant le blocage de l'accord coopératif par des coalitions de type (a) (leaders de Stackelberg après scission), reste le même que celui trouvé pour ces coalitions sous l'hypothèse d'un équilibre de Nash post-scission. Autrement dit, ces coalitions sont toujours bloquantes. De la même façon, en se référant aux résultats obtenus pour un contexte post-scission de Nash, les coalitions de type (c) et vérifiant  $W_r (= \frac{s}{n}) \geq \mu^*$  ne sont jamais bloquantes. On peut toutefois vérifier moyennant un calcul simple que les autres coalitions de type (c) ne peuvent également jamais bloquer l'accord. En regroupant l'ensemble de tous les résultats, qu'on peut donc montrer aisément, cela donne la proposition suivante:

### **Lemme II.3**

- 1- Les coalitions de type (a) sont bloquantes.
- 2- Les coalitions de type (c) ne sont jamais bloquantes.
- 3- Les coalitions de type (b) qui bloquent l'accord coopératif sont celles qui vérifient:

$$(II.10) \quad \frac{\mu}{1+2\mu} \leq \frac{s}{n} \leq \frac{1}{(1+\mu)^\mu}$$

Il s'avère donc, au vu de ce lemme, que la décision finale des coalitions de type (a) et de type (c) (bloquer ou ne pas bloquer) ne changera pas, qu'elles anticipent un équilibre de Nash post-scission ou qu'elles anticipent un équilibre post-scission de Stackelberg dans lequel elles sont en position de leader. Par contre, on peut remarquer que parmi les coalitions de type (b) qui ne bloquaient pas l'accord sous l'hypothèse d'un équilibre de Nash post-scission, un certain nombre va pouvoir le faire sous l'hypothèse d'un équilibre de Stackelberg post-scission. Plus précisément, en appliquant directement l'assertion (2) de la proposition (II.8), les coalitions qui ne bloquent pas l'accord dans un contexte post-scission de Nash mais bloquent dans un contexte de Stackelberg sont celles dont la taille relative vérifie la condition:

$$(II.11) \quad \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} \leq \frac{s}{n} \leq \frac{1}{(1+\mu)^\mu}$$

On peut remarquer entre autres, que les coalitions de type (b) qui n'obtiennent pas de par leur position de leader un accroissement significatif de leur pouvoir de blocage (par rapport au contexte post-scission de Nash), se recrutent parmi les coalitions de  $T_b(\mu)$  de plus grande taille relative. Plus précisément, cette dernière doit vérifier:

$$(II.12) \quad \frac{1}{(1+\mu)^\mu} \leq \frac{s}{n} \leq \frac{1+\mu}{1+2\mu}$$

Rappelons que  $\frac{1+\mu}{1+2\mu}$  est la borne supérieure du domaine de définition des coalitions de type (b) (domaine de variation de leur taille relative).

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'accord coopératif appartienne à  $C_{S_t}^I$  est que l'économie ne renferme que des coalitions de type (b) dont la taille relative vérifie de plus la condition (II.12) (seules coalitions non bloquantes). On peut alors vérifier que la condition est que seuls deux agents soient en compétition et que dans l'économie les biens privé et public jouissent du même poids aux yeux des consommateurs ( $\mu=1$ ). Il faut toutefois rappeler que pour cette valeur de  $\mu$ , cette condition concerne l'appartenance au  $C_{S_t}^I$  de l'accord coopératif à

redistribution égalitaire des consommations privées (le cas  $\mu=1$ , faisant intervenir un nombre infini d'autres accords). C'est le sens de la proposition suivante:

**Proposition II.9**

$$a(N) \in C_{S_t}^I \Leftrightarrow n=2 \text{ et } \mu=1.$$

**Preuve**

Elle est immédiate: il suffit d'écrire la condition pour qu'il n'existe dans l'économie que des coalitions vérifiant la condition (II.12), autrement dit, que les coalitions de plus petite taille ( $s=1$ ) et de plus grande taille ( $s=n-1$ ) vérifient cette condition (on exclut alors simultanément de l'économie, les coalitions de type (a)).

□

Dans une économie comportant deux agents et où  $\mu=1$ , aucun agent ne peut espérer, en jouant en leader de Stackelberg, une utilité meilleure que celle qui lui est offerte dans la coopération. Dans une telle économie, l'accord coopératif à redistribution égalitaire des consommations privées Pareto-domine tout équilibre de Stackelberg alternatif à la coopération. La coopération est alors inéluctable.

**C- Structure de coalitions dichotomique: une alternative à la coopération**

Considérons (de nouveau) les fonctions:

$$(II.13) \quad \left| \begin{array}{l} s_{\text{sup}}(\mu, f(W_r)) = \frac{(1+f(W_r))^{1+1/\mu} - 1}{(1+f(W_r))^{1+1/\mu}} \\ s_a^*(\mu, f(W_r)) = \frac{1+\mu}{\mu} \frac{f(W_r)}{(1+f(W_r))^{1+1/\mu}} \end{array} \right.$$

**Proposition II.10**

Il existera toujours des structures de coalitions dichotomiques non bloquantes dans un contexte post-scission de Stackelberg.

1) Si  $W_r \leq \mu^*$ , ce sont celles dont la coalition "leader" vérifie la condition:

$$s_a^*(\mu, f(W_r)) \leq \frac{s}{n} \leq s_{\sup}(\mu, f(W_r)) \quad \text{où } f(W_r) = \begin{cases} W_r & \text{si } W_r \leq \mu \\ \mu & \text{si } \mu \leq W_r \leq \mu^* \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

2) Si  $W_r \geq \mu^*$ , ce sont celles dont la coalition "leader" vérifie la condition:

$$(\text{II.15}) \quad s_c^*(\mu, W_r) \leq \frac{s}{n} \leq s_a^*(\mu, W_r)$$

**Preuve:** Il suffit d'appliquer les résultats obtenus dans un contexte de Stackelberg et d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour que ni la coalition "leader", ni la coalition "follower" ne puissent bloquer l'accord coopératif  $a(N)$ .

**II.2.4. Menaces et stabilité de l'accord coopératif**

Considérons un accord coopératif initial  $a(N) = (x_1, \dots, x_n, y)$ . Supposons qu'une coalition  $S$  décide de bloquer en choisissant comme stratégie post-scission, un vecteur  $a(S) = ((x_i)_{i \in S}, y(S)) \in A(S)$  quelconque. La contribution-réponse de la coalition complémentaire étant  $y(N-S)$ , une condition nécessaire et suffisante pour que  $S$  ne puisse bloquer est:

$$\exists j \in S \text{ tel que } (x_j')^\mu [y(S) + y(N-S)] \leq x_j^\mu y.$$

Ce qui est équivalent à écrire:  $\exists j \in S$  tel que

$$(\text{II.16}) \quad x_j \geq \left( \frac{y(S) + y(N-S)}{y} \right)^{1/\mu} \cdot x_j'.$$

Remarquons par ailleurs, qu'une condition suffisante pour que la coalition S ne puisse bloquer est que:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \left( \frac{y(S) + y(N-S)}{y} \right)^{1/\mu} \cdot \sum_{i \in S} x_j', \text{ c'est à dire:}$$

$$(II.17) \quad \sum_{i \in S} x_i \geq \left( \frac{y(S) + y(N-S)}{y} \right)^{1/\mu} \cdot [W(S) - y(S)].$$

### A- Caractérisation du $\gamma$ -cœur

Caractérisons l'ensemble  $B_{N-S}(a(N))$  des menaces crédibles appartenant à la courbe des meilleures de la coalition complémentaire N-S quand S prend l'initiative du blocage. Pour cela, il suffit d'écrire la condition (II.13) sous l'hypothèse que la coalition complémentaire utilise sa meilleure réponse.

Rappelons l'expression de la contribution-meilleure réponse de la coalition N-S à une contribution  $y(S)$  choisie par S (déduite de la relation (I.16) du chapitre I):

$$\left| \begin{array}{ll} y(N-S) = \frac{W(N-S) - \mu y(S)}{1 + \mu} & \text{si } y(S) \leq \frac{W(N-S)}{\mu} \\ y(N-S) = 0 & \text{si } y(S) \geq \frac{W(N-S)}{\mu} \end{array} \right.$$

La stratégie  $((x_i')_{i \in S}; y(S)) \in A(S)$  employée par la coalition S est alors de type  $(H\gamma)$  si et seulement si (application de la condition (II.13)):

$$(H\gamma') \quad \exists i \in S \text{ tel que } x_i \geq \left( \frac{y(S) + W(N-S)}{(1 + \mu)y} \right)^{1/\mu} \cdot x_j' \quad \text{si } y(S) \leq \frac{W(N-S)}{\mu}$$

ou

$$(H\gamma'') \quad \exists j \in S \text{ tel que } x_j \geq \left( \frac{y(S)}{y} \right)^{1/\mu} \cdot x_j' \quad \text{si } y(S) \geq \frac{W(N-S)}{\mu}$$

Il faut remarquer que si la stratégie  $((x_i')_{i \in S}; y(S))$  employée par la coalition S est telle qu'il existe un membre  $i$  vérifiant  $x_i' = 0$ , alors d'après les relations précédentes, cette stratégie est de type  $\gamma$  (puisque l'accord coopératif vérifie  $x_i > 0 \forall i \in N$ ).

Considérons les deux ensembles:

$$G_S^{'}[a(N)] = \{((x_i^{'})_{i \in S}; y(S)) \in A(S) \text{ vérifiant } (Hy')\}$$

$$G_S^{''}[a(N)] = \{((x_i^{'})_{i \in S}; y(S)) \in A(S) \text{ vérifiant } (Hy'')\}$$

d'où:

$$\{((x_i^{'})_{i \in S}; y(S)) \in A(S), \text{ de type } (Hy)\} = G_S^{'}[a(N)] \cup G_S^{''}[a(N)].$$

L'ensemble  $B_{N-S}[a(N)]$ , qui désigne l'ensemble des menaces crédibles appartenant à la courbe de meilleure réponse de la coalition N-S, peut être relié aux deux ensembles précédents au moyen de la relation:

$$(II.18) \quad B_{N-S}[a(N)] \neq \emptyset \Leftrightarrow G_S^{'}[a(N)] \cup G_S^{''}[a(N)] \neq \emptyset.$$

En particulier, nous pouvons énoncer la remarque suivante (qu'on peut justifier en tenant compte de la relation I.16 du chapitre I):

**Remarque**

$$(II.19): \quad 0 \in B_{N-S}[a(N)] \Leftrightarrow G_S^{''}[a(N)] \neq \emptyset.$$

Le  $\gamma$ -cœur est par définition, l'ensemble des allocations telles que quelle que soit la coalition S, toutes les stratégies réalisables de cette dernière sont de type (Hy).

On peut donc caractériser le  $\gamma$ -cœur par:

$$(II.20) \quad C_\gamma = \{a(N) \in A(N) \text{ tels que } \forall S \subset N, G_S^{'}[a(N)] \cup G_S^{''}[a(N)] = A(S)\}$$

Si l'on se restreint seulement aux accords coopératifs, nous pouvons expliciter de façon encore plus précise les propriétés d'un accord coopératif. Nous le faisons ci-dessous et successivement pour des valeurs de  $\mu$  différentes de 1 puis pour  $\mu$  égal à 1.

**1- Cas  $\mu \neq 1$**

Ici, et comme on l'a vu l'ensemble des accords coopératifs se réduit à un singleton. L'unique accord possible vérifie (relation II.2):

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \frac{(\mu W)}{n(1+\mu)} \quad \forall i \in N \\ y = \frac{W}{(1+\mu)} \end{array} \right.$$

La stratégie  $((x_i')_{i \in S}; y(S)) \in A(S)$  employée par la coalition  $S$  est alors de type  $(H_Y)$  si et seulement si (conditions  $(H_Y')$  et  $(H_Y'')$ ):

$$(II.21) \quad \exists i \in S : \left| \begin{array}{l} y(S) \leq \text{Min} \left\{ \frac{W(N-S)}{\mu}, \left( \frac{\mu W}{n(1+\mu) x_i'} \right)^\mu W - W(N-S) \right\} \quad (II.21.a) \\ \text{ou} \\ \frac{W(N-S)}{\mu} \leq y(S) \leq \left( \frac{\mu W}{n(1+\mu) x_i'} \right)^\mu \cdot \frac{W}{(1+\mu)} \quad (II.21.b) \end{array} \right.$$

Cela nous permet de caractériser de façon plus précise les ensembles  $G'[a(N)]$  et  $G''[a(N)]$  et donc le  $\gamma$ -coeur, c'est à dire:

$$G_S'[a(N)] = \{((x_i')_{i \in S}; y(S)) \in A(S) \text{ vérifiant (II.21.a)}\}$$

$$G_S''[a(N)] = \{((x_i')_{i \in S}; y(S)) \in A(S) \text{ vérifiant (II.21.b)}\}$$

D'où:

$$(II.22) \quad C_Y \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall S \subset N, ((t_i)_{i \in S}; y(S)) \in G_S'[a(N)] \cup G_S''[a(N)], \forall ((x_i')_{i \in S}; y(S)) \in A(S)$$

## 2- Cas $\mu=1$

L'utilité des agents s'exprime alors:  $u_i = x_i y \quad i=1, \dots, n$

La communauté a le choix de la répartition  $(x_1, \dots, x_n)$  des consommations privées contraint par le niveau pareto-optimal de bien public  $y$  à produire. De même, les coalitions  $S$  et  $N-S$  de la structure dichotomique qui s'installe à défaut de l'accord  $a(N)$  ont le choix des répartitions  $(x_i')_{i \in S}$  et  $(x_j')_{j \in N-S}$  contraint par leurs niveaux respectifs de contributions.

L'ensemble des accords coopératifs est l'ensemble des vecteurs  $(x_1, \dots, x_n, y)$  vérifiant (relation II.16):

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{W}{2} \\ y = W/2 \end{array} \right.$$

Dans ce cas, La stratégie  $((x_i)_{i \in S}; y(S)) \in A(S)$  employée par la coalition  $S$  est alors de type  $(Hy)$  si et seulement si (conditions  $(Hy')$  et  $(Hy'')$ ):

$$(II.23) \quad \exists i \in S: \left| \begin{array}{l} y(S) \leq \min \left\{ W(N-S), \frac{x_i}{x_i} W - W(N-S) \right\} \quad (II.23.a) \\ \text{ou} \\ W(N-S) \leq y(S) \leq \frac{x_i}{x_i} \cdot \frac{W}{2} \quad (II.23.b) \end{array} \right.$$

sous les hypothèses:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \frac{W}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{j \in S} x_j' = W(S) - y(S).$$

On peut dès lors caractériser le  $\gamma$ -coeur grâce à la relation (II.20) de la même manière que dans le cas  $\mu \neq 1$ , c'est à dire:

$$G_S'[a(N)] = \{((x_i)_{i \in S}; y(S)) \in A(S) \text{ vérifiant (II.23.a)}\}$$

$$G_S''[a(N)] = \{((x_i)_{i \in S}; y(S)) \in A(S) \text{ vérifiant (II.23.b)}\}$$

On en déduit:

$$(II.24): C\gamma = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, ((x_i)_{i \in S}; y(S)) \in G_S'[a(N)] \cup G_S''[a(N)], \forall ((x_i)_{i \in S}; y(S)) \in A(S)\}$$

## **B- Caractérisation du $\delta$ -coeur**



Rappelons qu'une contribution  $y(N-S)$  est de type  $(H_\delta)$  si elle empêche la coalition  $S$  de bloquer un accord coopératif par l'utilisation de sa meilleure réponse.

Il s'agit alors dans cette section, de caractériser l'ensemble  $D_{N-S}[a(N)]$  des contributions  $y(N-S) \in Y(N-S)$  de type  $(H_\delta)$  puis d'en déduire une caractérisation pour le  $\delta$ -cœur qui est défini comme suit:

$$C_\delta = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, Y(N-S) \cap D_{N-S}[a(N)] \neq \emptyset\}.$$

### 1- Cas $\mu \neq 1$

Supposons que la communauté  $N$  choisit l'accord coopératif  $a(N)$ . Écrivons la condition (II.16), en supposant que la coalition  $N-S$  choisit une contribution  $y(N-S)$  et la coalition  $S$  réagit en utilisant sa meilleure réponse (relation I.16), on obtient une condition nécessaire et suffisante pour que la stratégie  $y(N-S)$  soit de type  $(H_\delta)$ :

$$(II.25) \quad \left| \begin{array}{ll} y(N-S) \leq \left(\frac{s}{n}\right)^{\mu/(1+\mu)} \cdot W - W(S) & \text{si } y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu} \\ y(N-S) \leq \left(\frac{s \cdot \mu \cdot (1+W_r)}{n \cdot (1+\mu) \cdot W_r}\right)^\mu \cdot \frac{W}{(1+\mu)} & \text{si } y(N-S) \geq \frac{W(S)}{\mu} \end{array} \right.$$

Cela donne en conclusion:

$$(II.26) \quad \left| \begin{array}{ll} y(N-S) \leq \text{Min} \left\{ \frac{W(S)}{\mu}, \left(\frac{s}{n}\right)^{\mu/(1+\mu)} W - W(S) \right\} & (II.26.a) \\ \text{ou} & \\ \frac{W(S)}{\mu} \leq y(N-S) \leq \left(\frac{s \cdot \mu \cdot (1+W_r)}{n \cdot (1+\mu) \cdot W_r}\right)^\mu \cdot \frac{W}{(1+\mu)} & (II.26.b) \end{array} \right.$$

De ce fait:  $D_{N-S}[a(N)] = \{y(N-S) \in Y(S) / y(N-S) \text{ vérifie (II.26)}\}$  et nous en déduisons:

$$C_\delta = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, \exists y(N-S) \in Y(S) \text{ tel que } y(N-S) \text{ vérifie (II.26)}\}.$$

### Remarques

- 1-  $y(N-S)$  de type  $\delta$ ,  $\forall y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu} \Leftrightarrow \frac{s}{n} \geq \left(\frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{1+W_r}\right)^{1+1/\mu}$
- 2-  $0 \in D_{N-S}[a(N)]$  (de type  $\delta$ )  $\Leftrightarrow \frac{s}{n} \geq \left(\frac{W_r}{1+W_r}\right)^{1+1/\mu}$

### Preuve

La preuve est triviale. Pour montrer l'assertion (1), il suffit de chercher la condition pour laquelle  $\text{Min} \left\{ \frac{W(S)}{\mu} \left( \frac{s}{n} \right)^{\mu/(1+\mu)} W - W(S) \right\} = \frac{W(S)}{\mu}$ , et pour montrer l'assertion (2), il suffit de chercher la condition pour laquelle  $\left( \frac{s}{n} \right)^{\mu/(1+\mu)} W - W(S) \geq 0$ .

□

La remarque (1) donne une condition nécessaire et suffisante sur la taille relative de la coalition bloquante, sa richesse relative, et le taux  $\mu$  pour que toutes les stratégies de N-S "incitant" S à contribuer ( $y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu}$ ) soient de type  $\delta$ , c'est à dire dissuadent S de se former sans coût collectif pour elle (c'est à dire en employant sa meilleure réponse).

La remarque (2) mesure le "pouvoir" au sens de  $\delta$  d'une menace "extrême" de la coalition complémentaire, à savoir ne pas contribuer dans le cas d'une scission de S (autrement dit, à être "free-rider"). Là aussi, on a une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres habituels pour que cette menace empêche un blocage sans coût de la coalition S.

## 2- Cas $\mu=1$

Partons d'un accord coopératif  $a(N)$ , donc vérifiant:

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{W}{2} \\ y = W/2 \end{array} \right.$$

Écrivons la condition (II.13) en tenant compte de cette propriété et de l'expression de la meilleure réponse de la coalition S à la contribution  $y(N-S)$  de la coalition N-S dans le cas  $\mu=1$  (déduite de la relation I.17 du chapitre I). On obtient alors une condition nécessaire et suffisante pour que la contribution  $y(N-S)$  soit de type  $\delta$ :

$$(II.27) \quad \exists i \in S: \left| \begin{array}{l} y(N-S) \leq \text{Min} \left\{ W(S) \cdot \frac{x_i}{x_i}, W - W(S) \right\} \quad (II.27.a) \\ \text{ou} \\ \exists j \in S \text{ tel que } W(S) \leq y(N-S) \leq \frac{x_j}{x_j} \cdot \frac{W}{2} \quad (II.27.b) \\ \text{sous les hypothèses:} \\ \sum_{i=1}^n x_i = \frac{W}{2} \text{ et } \sum_{j \in S} x_j' = \frac{W(S) + y(N-S)}{2} \end{array} \right.$$

De manière similaire au cas  $\mu \neq 1$ , nous pouvons alors caractériser l'ensemble des menaces de type  $\delta$  et le coeur qui y est associé:

$$D_{N-S}[a(N)] = \{y(N-S) \in Y(S) / y(N-S) \text{ vérifie (II.27.a) ou (II.27.b)}\}.$$

$$C_\delta = \{a(N) \in A(N) / \forall S \subset N, \exists y(N-S) \in Y(S) \text{ tel que } y(N-S) \text{ vérifie (II.27)}\}.$$

De même que pour le cas  $\mu \neq 1$ , on peut aussi énoncer la remarque suivante:

**Remarque**

$$1- \forall y(N-S) \leq W(S), y(N-S) \text{ de type } \delta \Leftrightarrow \exists i \in S \text{ tel que } \frac{x_i}{x_i'} \geq 2 \cdot \frac{W_r}{1+W_r}$$

$$2- 0 \in D_{N-S}[a(N)] \text{ (de type } \delta) \Leftrightarrow \frac{x_i}{x_i'} \geq \frac{W_r}{1+W_r}$$

La preuve est immédiate (même procédé que le cas  $\mu \neq 1$ ).

**C- Équilibres forts**

Rappelons qu'un accord est un équilibre fort si d'une part, aucune coalition ne peut par la suite changer unilatéralement de stratégie et si d'autre part, cet accord appartient à l'ensemble:

$$\bar{A}(N) = \{a(N) \in A(N) / \forall i \in N, x_i \leq w_i\}.$$

Aucune coalition ne peut changer unilatéralement de stratégie signifie que pour l'équilibre fort  $a(N) = (x_1, \dots, x_n, y) \in \bar{A}(N)$ , on a:

$$(II.28) \quad \forall ((x_i')_{i \in S}, y(S)) \in A(S), \exists j \in S \text{ tel que } x_j \geq \left( \frac{y(S) + W(N-S) - \sum_{i \in N-S} x_i}{y} \right)^{1/\mu} \cdot x_i', \forall S \subset N$$

On peut observer que si  $y(S)=0$  et  $W(N-S) - \sum_{i \in N-S} x_i = 0$ , c'est à dire si la coalition  $S$  décide d'être free-rider et si tous les membres de  $N-S$  sont dispensés de contribution au bien public (dans l'accord  $a(N)$ ), la coalition  $S$  ne peut bloquer.

L'ensemble des équilibres forts est le e-coeur, et est alors défini comme suit:

$$(II.29) \quad C_e = \{a(N) \in \bar{A}(N) / \forall S \subset N, S \text{ vérifie la condition (II.28)}\}.$$

Si l'on se restreint aux allocations qui sont des accords coopératifs alors la condition (II.28) peut être davantage précisée, ce que nous faisons en menant l'analyse comme précédemment en traitant séparément le cas  $\mu=1$  et  $\mu \neq 1$ .

### 1- Cas $\mu \neq 1$

Étant donné que l'accord coopératif vérifie  $x_i = \frac{(\mu W)}{n(1+\mu)}$ ,  $\forall i \in N$ , alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $a(N)$  appartienne à  $\bar{A}(N)$  est:

$$(II.30) \quad w_i \geq \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W}{n}, \forall i \in N.$$

De plus, en appliquant la condition (II.28), on obtient la condition suivante, qui est nécessaire et suffisante pour que l'accord coopératif  $a(N)$  soit un équilibre fort:

$$(II.31) \quad \left| \begin{array}{l} \forall S \subset N, \forall ((x'_i)_{i \in S}, y(S)) \in A(S), \exists j \in S \text{ tel que:} \\ x'_j \leq \left( \frac{nW}{n(1+\mu)(y(S)+W(N-S))-\mu(n-s)W} \right)^{1/\mu} \frac{\mu W}{n(1+\mu)}. \end{array} \right.$$



Dans la relation précédente, nous écartons le cas où le dénominateur associé au premier facteur du produit (défini dans le deuxième membre de l'inéquation) est nul. Dans ce cas (voir la remarque suivant la relation (II.28)), la coalition associée ne peut bloquer.

Par ailleurs, si l'on se restreint aux seuls accords coopératifs, le e-coeur est ainsi l'ensemble des accords coopératifs appartenant à  $\bar{A}(N)$  tels que quelle que soit la coalition  $S$ , la condition (II.30) est vérifiée.

### 2- Cas $\mu=1$

Tout d'abord, décrivons les accords coopératifs appartenant à  $\bar{A}(N)$ . Ils vérifient:

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{W}{2} \\ y = W/2 \\ x_i \leq w_i, \forall i \in N. \end{array} \right.$$

Un accord appartenant à  $\bar{A}(N)$  est un équilibre fort si et seulement si (application de la condition (II.28)),  $\forall S \subset N$ , on a:

$$(II.32) \quad \left| \begin{array}{l} \forall ((x_i)_{i \in S}, y(S)) \in A(S), \exists j \in S \text{ tel que } x_j \geq \left( \frac{2[y(S) + W(N-S) - \sum_{i \in N-S} x_i]}{W} \right)^{1/\mu} \cdot x_j \\ \text{avec} \\ \sum_{i=1}^n x_i = \frac{W}{2} \end{array} \right.$$

La relation (II.32) définit ainsi la relation qui doit lier d'une part, la répartition des consommations privées  $(x_1, \dots, x_n)$  associée à un accord coopératif et d'autre part, celle choisie par une coalition pour ses membres pour que le blocage de cette dernière au sens du e-cœur ne puisse se produire.

### II.2.5 Illustrations numériques

Nous avons énoncé dans les sections II.1 et II.2, les relations d'inclusion entre les différentes notions de cœur (résumées dans les diagrammes II.1 et II.2, et montrant en particulier, que  $C_\alpha$  et  $C_\delta$  sont les ensembles les plus larges). D'autre part, nous avons donné dans les sections précédentes, les conditions nécessaires et suffisantes de non vacuité de ces ensembles. Nous donnons ici deux exemples, le premier illustrant le cas d'une économie à  $\delta$ -cœur non vide, N-cœur et S-cœur vides et le deuxième illustrant le cas d'une économie à  $\delta$ -cœur vide, N-cœur et S-cœur vides.

**Exemple 1:**  $n=3$  (agents a, b et c),  $\mu = 0.9$ ,  $w_a = w_b = 7$ ,  $w_c = 10$ .

Donnons d'abord les ensembles  $T_a(\mu)$ ,  $T_b(\mu)$ , et  $T_c(\mu)$ :

$$T_a(\mu) = \{\{a\}, \{b\}\}$$

$$T_b(\mu) = \{\{c\}, \{a,b\}\}$$

$$T_c(\mu) = \{\{b,c\}, \{a,c\}\}.$$

Discutons pour une telle économie, la stabilité de l'accord coopératif à travers les différents résultats obtenus.

1-  $C_\delta \neq \emptyset$ .

En effet, on vérifie que pour cette économie, l'accord  $a(N)$  (à répartition égalitaire des consommations privées) appartient au  $\delta$ -coeur. Par conséquent, quelle que soit la coalition envisagée, la coalition complémentaire dispose d'une menace de type  $\delta$  pour prévenir toute scission. Nous donnons ci dessous pour chaque coalition complémentaire l'intervalle dans lequel elle doit puiser son niveau de contribution (pour que celui ci soit de type  $\delta$ ):

$$\left| \begin{array}{l} y_{\{a\}} \text{ et } y_{\{b\}} \in [0, 0.28] \\ y_{\{c\}} \in [0, 3.28] \\ y_{\{a,c\}} \text{ et } y_{\{b,c\}} \in [0, 5.44] \\ y_{\{a,b\}} \in [0, 5.44]. \end{array} \right.$$

On peut vérifier que les stratégies de type  $\delta$  (puisées dans les intervalles précédents) dont disposent toutes les coalitions complémentaires potentielles sont telles que la meilleure réponse de la coalition bloquante est une contribution strictement positive. Cela veut dire que dans cette économie, si le free-riding (contribution nulle) d'une coalition est une meilleure réponse à une stratégie de la coalition complémentaire, il est systématiquement bloquant.

Regardons au passage ce que devient le résultat principal (la  $\delta$ -stabilité) en écartant les paramètres de leurs valeurs initiales. On peut vérifier qu'un changement de la valeur de  $\mu$  n'affecte pas le résultat (toutes choses égales par ailleurs) ainsi qu'une égalisation des richesses (aussi bien à  $w=7$  qu'à  $w=10$ ). Par contre, un enrichissement suffisant de l'agent  $c$  par exemple, remet en cause la stabilité de l'accord  $a(N)$ . Si par exemple,  $w_a=w_b=7$  et  $w_c=20$ , les coalitions  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ , et  $\{a,b\}$  sont bloquantes au sens du  $\delta$ -coeur et ces mêmes et seules coalitions bloquent toujours quand la richesse de  $c$  est portée à  $w_c=30, 40, 100$ , et  $1000$ . Si maintenant, on diminue la richesse de  $c$  pour atteindre  $w_c=1$  (et toujours  $\mu=0.9$ ,  $w_a=w_b=7$ ), on vérifie que cet agent bloque l'accord. Ces observations permettent d'accréditer a-priori l'idée d'un blocage par les éléments de richesse (relative) suffisamment petite.

2-  $C_N = \emptyset$  et par conséquent  $C_{S_i}^1 = \emptyset$ .

On peut vérifier précisément que tout agent isolé est bloquant au sens du  $N$ -coeur, alors que les coalitions constituées de deux agents ne bloquent jamais l'accord  $a(N)$ .

Les résultats 1, 2 et 3 ne sont évidemment pas surprenants. En effet, le  $\delta$ -coeur est l'ensemble le plus large de toutes les notions de coeur définies. On n'a entrepris entre autres par cet exemple, que d'exhiber un cas d'économie où l'accord coopératif appartient à la fois au complémentaire de  $C_N$  dans  $C_\delta$  et à celui de  $C_{S_i}^l$  dans  $C_\delta$ .

**Exemple 2:**  $n=3$  (agents  $a$ ,  $b$  et  $c$ ),  $\mu=0.6$ ,  $w_a=1$ ,  $w_b=2$ ,  $w_c=3$ .

Donnons les ensembles  $T_a(\mu)$ ,  $T_b(\mu)$ , et  $T_c(\mu)$ :

$$T_a(\mu) = \{\{a\}\}$$

$$T_b(\mu) = \{\{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}\}$$

$$T_c(\mu) = \{\{b,c\}\}.$$

$$1- C_\delta = \emptyset.$$

On peut vérifier en effet que dans cette économie, l'accord coopératif (on se restreint ici, dans le cas  $\mu=1$  à l'accord à distribution égalitaire des consommations privées) n'appartient pas au  $\delta$ -coeur. Alors que toutes les coalitions complémentaires potentielles disposent d'une menace de type  $\delta$  contre la coalition bloquante, la coalition  $\{a\}$  ne dispose d'aucune menace de ce type. Cela veut dire que la coalition  $\{b,c\}$  peut (si elle joue en follower) bloquer avec sa meilleure réponse. D'autre part, toutes les menaces dont disposent les coalitions (hormis  $\{a\}$ ), conduisent la coalition bloquante à apporter une contribution positive (en utilisant sa meilleure réponse).

Regardons à présent, ce que deviennent ces résultats à la faveur de quelques variations des paramètres.

Quand toutes les valeurs restent inchangées mais qu'on passe à une économie où le bien privé est bien plus apprécié ( $\mu=0.9$ ), le résultat principal ne change pas (la  $\delta$ -stabilité de l'accord n'est toujours pas garantie), cependant, la coalition  $\{b,c\}$  dispose cette fois-ci de stratégies de type  $\delta$  pour lesquelles la meilleure réponse de la coalition bloquante  $\{a\}$  est une contribution nulle. Cela signifie que la coalition  $\{b,c\}$  a désormais les moyens d'empêcher (dans "le sens  $\delta$ ") la coalition  $\{a\}$  de bloquer en "free-rider" (c'est à dire en profitant du bien sans aucune contribution).

$$2- C_N = \emptyset \text{ et par conséquent } C_{S_i}^l = \emptyset.$$

Les coalitions  $\{b\}$  et  $\{c\}$  bloquent l'accord  $a(N)$  au sens du  $N$ -coeur.

## **ANNEXE**

### **CHAPITRE I**

#### **Preuve des lemmes 3 et 4:**

Il suffit de résoudre le programme I.14.

1)  $\mu < 1$

Le problème (I.14) est un problème de programmation convexe. En effet, résoudre le programme (I.14) par rapport au vecteur  $((x_i)_{i \in S}, y(S))$  (à  $y(N-S)$  donné), est équivalent à résoudre le programme qui suit par rapport au vecteur  $((x_i)_{i \in S}, y)$  (à  $y(N-S)$  donné):

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{i \in S} u_i(x_i; y) \\ \\ y = W(S) - \sum_{i \in S} x_i + y(N-S) \\ \\ y \geq y(N-S) \end{array} \right.$$

Comme  $\ln u_i = \mu \ln(x_i) + \ln(y)$  est une fonction concave sur l'ensemble convexe  $\prod [0, w_i] \times \mathbb{R}^+$  (somme de deux fonctions concaves), le programme précédent est bien convexe, donc également le programme (I.14). Les conditions du premier ordre de Kuhn et Tucker sont alors nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions au programme (I.14) à la condition que la fonction  $u_i$  soit différentiable ( $\forall i \in S$ ), c'est à dire que  $x_i > 0 \quad \forall i \in S$ .

Le lagrangien associé au problème (I.14) s'écrit:

$$L = (W(N-S) - \sum_{i \in N-S} x_i + y(S)) \left( \sum_{i \in N-S} x_i^\mu \right) + \beta \left( W(N-S) - \sum_{i \in N-S} x_i \right)$$

Sous la condition  $x_i \geq 0 \quad \forall i \in S$ , les conditions du premier ordre donnent:



$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} \sum_{j \in S} x_j + \mu \cdot x_i \cdot [W(S) - \sum_{j \in S} x_j + y(N-S)] - \beta = 0 \quad \forall i \in S \\ \beta [W(S) - \sum_{j \in S} x_j] = 0 \end{array} \right.$$

Deux cas sont à envisager:

$$1) \beta > 0 \text{ et } W(S) - \sum_{j \in S} x_j = 0$$

Si  $y(N-S) > \frac{W(S)}{\mu}$ , et en posant  $s = |S|$ :

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} x_i = \frac{W(S)}{s} \quad \forall i \in S \\ y(S) = 0 \end{array} \right.$$

$$2) W(S) - \sum_{j \in S} x_j > 0 \text{ et } \beta = 0 :$$

Si  $y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu}$  :

$$(3) \quad \left| \begin{array}{l} x_i = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{W(S) + y(N-S)}{s} \quad \forall i \in S \\ y(S) = \frac{W(S) - \mu y(N-S)}{1+\mu} \end{array} \right.$$

En conclusion:

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{W(S) + y(N-S)}{s} \quad \forall i \in S, \quad y(S) = \frac{W(S) - \mu y(N-S)}{1+\mu} \quad \text{si } y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu} \\ x_i = \frac{W(S)}{s} \quad \forall i \in S, \quad y(S) = 0 \quad \text{si } y(N-S) \geq \frac{W(S)}{\mu} \end{array} \right.$$

2)  $\mu=1$

Dans ce cas, il faut remarquer que la fonction d'utilité  $u_S$  s'écrit:

$$u_S = (W(S) - \sum_{i \in S} x_i + y(N-S)) \left( \sum_{i \in S} x_i \right)$$

Cette utilité est uniquement fonction de  $z = \sum_{i \in S} x_i$ . Le lagrangien associé au programme (I.14) est aussi fonction de la variable  $z$ , qui est par conséquent, la variable du problème de maximisation (I.14).

Par conséquent, la contribution apportée par la coalition  $S$  à la contribution  $y(N-S)$  de la coalition  $N-S$  s'exprime de la même manière que précédemment (relation (1) en remplaçant  $\mu$  par 1). La différence se situe au niveau du degré de liberté dont dispose la coalition pour fixer la contribution de chacun de ses membres.

#### Solutions de "bord"

Les solutions trouvées sont celles dont les composantes sont strictement positives (condition  $x_i > 0 \forall i \in S$ ). Si  $\mu = 1$ , les solutions de bord sont aussi acceptables pourvu que  $\sum_{i \in S} x_i \neq 0$  (voir

l'analyse précédente de ce cas). Montrons qu'il n'existe pas de solutions de bord quand  $\mu \neq 1$ .

Prenons pour cela, et sans perte de généralité,  $S = \{1, \dots, s\}$ , et supposons  $(x_1, \dots, x_s)$  une solution du programme (I.14) telle que  $x_i = 0 \forall i = 1, \dots, k$  ( $k < s$ ).

Soit  $S^+ = S - \{1, \dots, k\} = \{k+1, \dots, s\}$

A  $y(N-S)$  donné, l'utilité atteinte par  $S$  en jouant la stratégie  $(x_i)_{i \in S}$  est:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} \hat{u}_1 = \sum_{j \in S^+} u_j \left( \frac{W(S)}{s-k}, y(N-S) \right) \text{ si } y(N-S) \geq \frac{W(S)}{\mu} \\ \hat{u}_2 = \sum_{j \in S^+} u_j \left( \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W(S)+v(N-S)}{n-s}, \frac{W(S)-\mu v(N-S)}{1+\mu} + y(N-S) \right) \text{ si } y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu} \end{array} \right.$$

Autrement dit:

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} \hat{u}_1 = (s-k) \left[ \frac{W(S)}{s-k} \right]^\mu y(N-S) \text{ si } y(N-S) \geq \frac{W(S)}{\mu} \\ \hat{u}_2 = (s-k) \left[ \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W(S)+v(N-S)}{n-s} \right]^\mu \left[ \frac{W(S)-\mu v(N-S)}{1+\mu} + y(N-S) \right] \text{ si } y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu} \end{array} \right.$$

En jouant la solution (I.17) (aux composantes strictement positives), la coalition  $S$  s'assure une utilité:

$$(6) \quad \left| \begin{array}{ll} u_1^* = s \left[ \frac{W(S)}{s} \right]^\mu y(N-S) & \text{si } y(N-S) \geq \frac{W(S)}{\mu} \\ u_2^* = s \left[ \frac{\mu}{1+\mu} \frac{W(S)+v(N-S)}{n-s} \right]^\mu \left[ \frac{W(S)-\mu v(N-S)}{1+\mu} + y(N-S) \right] & \text{si } y(N-S) \leq \frac{W(S)}{\mu} \end{array} \right.$$

On peut vérifier que

$$(7) \quad \left| \begin{array}{ll} u_1^* > \hat{u}_1 \text{ et } u_2^* > \hat{u}_2 & \text{si } \mu \neq 1 \\ u_1^* = \hat{u}_1 \text{ et } u_2^* = \hat{u}_2 & \text{si } \mu = 1 \end{array} \right.$$

Si  $\mu \neq 1$ , la meilleure réponse de la coalition S à une stratégie  $y(N-S)$  de la coalition N-S ne peut donc jamais être une solution de bord. Par contre, quand  $\mu = 1$ , la coalition S est indifférente entre l'emploi d'une solution de bord ou d'une solution autre.

Les mêmes résultats sont aussi valables pour la coalition N-S.

La relation (I.17) décrit donc toutes les solutions du programme (I.14) dans le cas où  $\mu \neq 1$

□

#### **Preuve de la proposition I.4:**

Dans ce cas, c'est à dire quand  $\mu=1$ , et comme on l'a vu, les solutions (I.17) et (I.20) ne représentent pas toutes les solutions des programmes (I.14) et (I.15). Pour trouver l'ensemble des solutions, il suffit de remarquer que l'utilité de la coalition S quand  $\mu = 1$  et à  $y(N-S)$  donné s'écrit:

$$u_S = (W(S) - \sum_{i \in S} x_i + y(N-S)) \left( \sum_{i \in S} x_i \right)$$

Cette utilité est uniquement fonction de  $z = \sum_{i \in S} x_i$ . Le lagrangien associé au programme (I.17) est aussi fonction de la variable  $z$ .  $z$  est par conséquent la variable du problème de maximisation (I.14).

Par conséquent, le résultat final d'équilibre de Nash en terme de niveau de production d'équilibre est le même que précédemment (relation I.19 en remplaçant  $\mu$  par 1). La différence se situe au niveau du degré de liberté dont dispose la coalition pour fixer la contribution de chacun de ses membres.

Autrement dit, l'équilibre de Nash s'écrit:

$$(8) \quad \left| \begin{array}{ll} (y(S), y(N-S)) = \left(0, \frac{W(N-S)}{2}\right) & \text{si } S \in T_a(1) \\ \text{Avec } \sum_{i \in S} x_i = W(S) & \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left| \begin{array}{ll} (y(S), y(N-S)) = \left(\frac{2W(S) - W(N-S)}{3}, \frac{2W(N-S) - W(S)}{3}\right) & \text{si } S \in T_b(1) \\ \text{Avec } \sum_{i \in S} x_i = \frac{W(S)}{3} & \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left| \begin{array}{ll} (y(S), y(N-S)) = \left(\frac{W(S)}{2}, 0\right) & \text{si } S \in T_c(1) \\ \text{Avec } \sum_{i \in S} x_i = \frac{W(S)}{2} & \end{array} \right.$$

□

### **Preuve de la proposition I.5:**

Comme  $W(S)/W(N-S) \leq \mu$ , les contraintes du programme (I.25) sont incompatibles. En d'autres termes, la coalition  $S$  n'est pas suffisamment riche pour jouer une stratégie qui incite la coalition  $N-S$  à ne pas contribuer. Elle est de ce fait contrainte à choisir une solution du programme (I.24).

#### **Résolution du programme (I.24)**

Sous l'hypothèse (H1), c'est à dire,  $u_S = \sum_{i \in S} u_i$ , le lagrangien du programme (I.24) s'écrit:

$$(11) \quad L = u_S + \beta \left\{ -W(S) + \sum_{i \in S} x_i + \frac{W(N-S)}{\mu} \right\} + \Delta \left\{ W(S) - \sum_{i \in S} x_i \right\}$$

Le programme (I.24) (ainsi d'ailleurs que le programme (I.25)) est convexe (pour des raisons similaires à celles énoncées dans la section I.2.2). Les conditions du 1er ordre sont alors nécessaires et suffisantes.

Sous la condition:  $\underline{x_i} > 0 \quad \forall i \in S$ , les conditions du 1er ordre s'écrivent:

$$(12) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\mu W}{1+\mu} x_j^{\mu-1} - \frac{1}{1+\mu} ( \mu x_j^{\mu-1} \sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in N} x_i^{\mu} ) + \beta - \Delta = 0 \\ B [ y(S) - \frac{W(N-S)}{\mu} ] = 0 \\ \Delta [ W(S) - \sum_{i \in S} x_i ] = 0 \end{array} \right.$$

D'où la solution:

- Si  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \mu$  :

$$(13) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = 0 \text{ et } y(N-S) = \frac{W(N-S)}{1+\mu} \\ x_i = \frac{W(S)}{s} \quad \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{\mu W(N-S)}{(n-s)(1+\mu)} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

- Si  $\mu \leq \frac{W(S)}{W(N-S)} \leq 1+\mu+1/\mu$  :

$$(14) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(S)-\mu W(N-S)}{1+\mu} \text{ et } y(N-S) = \frac{(1+\mu+\mu^2)W(N-S)-\mu W(S)}{(1+\mu)^2} \\ x_i = \frac{\mu W}{s(1+\mu)} \quad \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{\mu W}{(n-s)(1+\mu)^2} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

- Si  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \geq 1+\mu+1/\mu$  :

$$(15) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(N-S)}{\mu} \text{ et } y(N-S) = 0 \\ x_i = \frac{\mu W(S)-W(N-S)}{\mu s} \quad \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{W(N-S)}{n-s} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

On peut vérifier que le programme (I.24) ne peut admettre de solutions de bord (toute solution de ce type procurera une utilité  $u_S$  inférieure à celle procurée avec les solutions ci-dessus).

Sous l'hypothèse  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \mu$ , et comme on l'a déjà souligné, l'équilibre de Stackelberg est déduit de la résolution ci dessus du programme (I.24). La stratégie de leader utilisée par la

coalition S est alors définie par la relation (13). En calculant la réponse de la coalition N-S (au moyen de sa fonction de meilleure réaction), on peut vérifier que l'équilibre de Stackelberg coïncide avec l'équilibre de Nash associé à la structure de coalitions dichotomique asymétrique.

□

**Preuve du lemme 5:**

**Résolution du programme (I.25)**

Ce programme étant convexe, les conditions du 1er ordre sont nécessaires et suffisantes.

On obtient les solutions:

1) Si  $1/\mu \leq \frac{W(S)}{W(N-S)} \leq 1+1/\mu$  alors:

$$(16) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(N-S)}{\mu} \text{ et } y(N-S) = 0 \\ x_i = \frac{\mu W(S) - W(N-S)}{\mu s} \quad \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{W(N-S)}{n-s} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

2) Si  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \geq 1+1/\mu$

$$(17) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(S)}{1+\mu} \text{ et } y(N-S) = 0 \\ x_i = \frac{\mu W(S)}{(1+\mu)s} \quad \forall i \in S \text{ et } x_j = \frac{W(N-S)}{n-s} \quad \forall j \in N-S \end{array} \right.$$

On peut aisément vérifier que le programme (I.25) ne peut admettre de solutions de bord si  $\mu \neq 1$  (on montre qu'avec ce type de solution, on obtient toujours un niveau d'utilité  $u_S$  inférieur).

Par contre, si  $\mu = 1$  les solutions de bord ne sont pas à exclure. De ce fait, la stratégie de "leader" de la coalition S doit faire l'objet d'analyses séparées selon que  $\mu=1$  ou  $\mu \neq 1$ .

Les assertions du lemme 5 et 6 découlent immédiatement de l'exploitation des résultats ainsi obtenus.

□

**Preuve de la proposition I.6:**

Pour justifier cette proposition, il suffit d'exploiter les solutions obtenues pour les programmes (I.24) et (I.25) et déduire dans chaque cas de figure, celle qui réalise la maximum d'utilité pour la coalition S. Commençons par l'étude du cas  $\mu \neq 1$ . Il vient:

a)  $\mu \neq 1$

a) Si  $\frac{W(S)}{W(N-S)} \leq \mu$ , et comme il a été expliqué précédemment, la stratégie de Stackelberg de la coalition S n'est autre que la solution du programme (I.24), autrement dit:

$$(18) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = 0 \\ x_i = \frac{W(S)}{s} \quad \forall i \in S \end{array} \right.$$

b) Si  $\mu \leq \frac{W(S)}{W(N-S)} \leq 1/\mu$ , de même que pour le cas (1), la stratégie de Stackelberg de la coalition S est la solution du programme (I.24), c'est à dire:

$$(19) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(S) - \mu W(N-S)}{1 + \mu} \\ x_i = \frac{\mu W}{s(1 + \mu)} \quad \forall i \in S \end{array} \right.$$

c) Si  $1/\mu \leq \frac{W(S)}{W(N-S)} \leq 1 + 1/\mu$ , la coalition S joue la stratégie qui réalise le plus élevé des niveaux:

$$(20) \quad \left| \begin{array}{l} u_S \left( \left( \frac{\mu W(S) - W(S)}{\mu s} \right)_{i \in S} ; \frac{W(N-S)}{\mu} \right) \\ u_S \left( \left( \frac{\mu W}{s(1 + \mu)} \right)_{i \in S} ; \frac{W}{(1 + \mu)^2} \right) \end{array} \right.$$

Le lemme 5 permet de conclure (comparaison des arguments de  $u_S$  un à un).

d) Si  $1 + 1/\mu \leq \frac{W(S)}{W(N-S)} \leq 1 + 1/\mu + \mu$ , la coalition S joue la stratégie qui réalise le maximum des utilités :

$$(21) \quad \left| \begin{array}{l} u_S \left( \left( \frac{\mu W(S)}{(1 + \mu)s} \right)_{i \in S} ; \frac{W(S)}{1 + \mu} \right) \\ u_S \left( \left( \frac{\mu W}{(1 + \mu)s} \right)_{i \in S} ; \frac{W}{(1 + \mu)^2} \right) \end{array} \right.$$

De même que pour (c), la comparaison des arguments un à un permet de conclure (lemme 5).

e) Si  $W(S)/W(N-S) \geq 1 + 1/\mu + \mu$ , la coalition S joue la stratégie qui réalise le maximum des utilités :

$$(22) \quad \left| \begin{array}{l} u_S \left( \left( \frac{\mu W(S) - W(N-S)}{\mu S} \right)_{i \in S}; \frac{W(N-S)}{\mu} \right) \\ u_S \left( \left( \frac{\mu W(S)}{(1+\mu)S} \right)_{i \in S}; \frac{W(S)}{1+\mu} \right) \end{array} \right.$$

Les résultats énoncés dans le lemme 5 permettent de conclure.

#### b) Cas $\mu=1$

Dans ce cas, l'utilité  $u_S$  de la coalition S, présente la particularité de n'être fonction que de la seule variable  $z = \sum_{i \in S} x_i$ , c'est à dire finalement, de la variable  $y(S)$  qui représente la contribution décidée par la coalition S. D'où  $u_S \neq u_S(y(S))$ .

Pour trouver la stratégie de Stackelberg de S, il suffit de résoudre les programmes (I.24) et (I.25) par rapport à la seule variable  $z$  et de faire la comparaison des niveaux d'utilité correspondant aux solutions respectives. Comme dans le cas de l'équilibre de Nash, le résultat diffère du cas  $\mu \neq 1$  par le fait que la coalition S détermine seulement son niveau de contribution totale. Elle demeure ensuite libre de choisir une répartition adéquate entre ses membres et toute répartition adoptée, constitue une stratégie de Stackelberg pour S.

#### Solutions du programme (I.31)

1) Si  $W(S) \leq W(N-S)$ :

$$(23) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = 0 \\ (x_i)_{i \in S} \text{ tel que } \sum_{i \in S} x_i = W(S) \end{array} \right.$$

2) Si  $W(N-S) \leq W(S) \leq 3 W(N-S)$ :

$$\left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(S) - W(N-S)}{2} \end{array} \right.$$



$$(24) \quad \left| \begin{array}{l} (x_i)_{i \in S} \text{ tel que } \sum_{i \in S} x_i = \frac{W}{2} \end{array} \right.$$

3) Si  $W(S) \geq 3 W(N-S)$

$$(25) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = W(N-S) \\ (x_i)_{i \in S} \text{ tel que } \sum_{i \in S} x_i = W(S) - W(N-S) \end{array} \right.$$

### Solutions du programme (I.25)

Ce programme n'a de sens que si  $W(S) \geq W(N-S)$  (compatibilité des contraintes d'inégalités).  
Résumons alors l'ensemble de ses solutions:

1) Si  $W(N-S) \leq W(S) \leq 2 W(N-S)$

$$(26) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = W(N-S) \\ (x_i)_{i \in S} \text{ tel que } \sum_{i \in S} x_i = W(S) - W(N-S) \end{array} \right.$$

2) Si  $W(S) \geq 2 W(N-S)$

$$(27) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{W(S)}{2} \\ (x_i)_{i \in S} \text{ tel que } \sum_{i \in S} x_i = \frac{W(S)}{2} \end{array} \right.$$

La stratégie de leader de la coalition  $S$  est obtenue après comparaison des niveaux d'utilité associés aux solutions des programmes (I.24) et (I.25).

Autrement dit:

1) Si  $1 \leq W(S)/W(N-S) \leq 2$ , il faut comparer:

$$u_1 = u_S \left( \frac{W(S) - W(N-S)}{2} \right) \text{ et } u_2 = u_S(W(N-S))$$

On vérifie aisément que  $u_1 > u_2$ . Par conséquent:  $y_S^* = \frac{W(S) - W(N-S)}{2}$

2) Si  $2 \leq W(S)/W(N-S) \leq 3$ , il faut comparer:

$$u_1 = u_S \left( \frac{W(S) - W(N-S)}{2} \right) \text{ et } u_2 = u_S \left( \frac{W(S)}{2} \right)$$

Dans ce cas, on peut vérifier:

$$u_1 \geq u_2 \text{ si } 2 \leq W(S)/W(N-S) \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ et alors } y_S^* = \frac{W(S) - W(N-S)}{2}$$

$$u_1 \leq u_2 \text{ si } \frac{1}{\sqrt{2}-1} \leq W(S)/W(N-S) \leq 3 \text{ et alors } y_S^* = \frac{W(S)}{2}$$

3) Si  $W(S)/W(N-S) \geq 3$ , il faut comparer:

$$u_1 = u_S(W(N-S)) \text{ et } u_2 = u_S \left( \frac{W(S)}{2} \right)$$

On peut facilement vérifier que  $u_1 \leq u_2$  et donc:  $y_S^* = \frac{W(S)}{2}$

□

## **ANNEXE**

### **CHAPITRE II**

#### **SECTION II. 2**

##### **- Détermination de l'accord coopératif**

La coalition N doit déterminer donc un vecteur  $(x_1, \dots, x_n)$  qui réalise, sous la contrainte  $\sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n x_i > 0$ , le maximum de la fonction:

$$u_N(x_1, \dots, x_n; y) = \sum_{i=1}^n x_i^\mu \left( \sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Les conditions du premier ordre sont nécessaires et suffisantes (voir chapitre I). Il vient:

$$(28) \quad \frac{\partial u_N}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \in N \quad \text{c.à.d.} \quad \mu x_i^{\mu-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n x_i}$$

Condition nécessaire:

$$(29) \quad x_i = x_j = k \quad \forall i, j \in N$$

En vérifiant que  $k=0$  n'est pas la solution cherchée, il vient:

$$(30) \quad k = \frac{(\mu W)}{n(1+\mu)}$$

Et alors:

$$(31) \quad y(N) = y = \frac{W}{(1+\mu)}$$

### Preuve de la proposition II.2:

En comparant les utilités obtenues par tout membre d'une coalition  $S \in T_a(\mu)$  à l'intérieur de celle ci d'une part, et à l'issue de la coopération avec l'ensemble de la communauté d'autre part, on déduit la condition nécessaire et suffisante de profitabilité de la scission:

$$(32) \quad \left| \begin{array}{l} \left[ \frac{W(S)}{s} \right]^\mu \frac{W(N-S)}{1+\mu} > \left[ \frac{\mu W}{n(1+\mu)} \right]^\mu \frac{W}{1+\mu} \\ \text{avec} \\ W_r \leq \frac{\mu}{1+\mu} \end{array} \right.$$

Il vient:

$$(33) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{s}{n} < \frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu}} \\ W_r \leq \frac{\mu}{1+\mu} \end{array} \right.$$

Posons :

$$(34) \quad s_a^*(\mu, W_r) = \frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu}}$$

$s_a^*(\mu, W_r)$  est le seuil minimal de la taille relative  $\frac{s}{n}$  requis pour une coalition de type (a) afin que le blocage profite à tous ses membres.

D'autre part:

$$\frac{\partial s_a^*}{\partial W_r} = \frac{1+\mu}{\mu^2} \frac{\mu - W_r}{(1+W_r)^{2+1/\mu}}$$

$$\frac{\partial s_a^*}{\partial W_r} > 0 \text{ si } W_r < \mu \text{ ce qui est toujours vrai pour } S \in T_a(\mu).$$

$$\frac{\partial s_a^*}{\partial \mu} = \left( \frac{W_r}{\mu^2(1+W_r)^{1+1/\mu}} \right) \left( \frac{1+\mu}{\mu} \ln(1+W_r) - 1 \right)$$

$$\frac{\partial s_a^*}{\partial \mu} < 0 \text{ si } M(\mu) = e^{\mu/(1+\mu)} - 1 > W_r$$

Il suffit de montrer que  $M(\mu) > \mu/(1+\mu)$  car alors  $M(\mu) > W_r$  (puisque  $\mu/(1+\mu) > W_r$ ).

Posons  $T(\mu) = M(\mu) - \mu/(1+\mu)$

$T'(\mu) = \left( \frac{1}{(1+\mu)^2} \right) (e^{\mu/(1+\mu)} - 1)$  est toujours positif.

Comme  $T(0) = 0$  (et  $T$  croissante) alors  $T(\mu) > 0 \forall \mu \in [0,1]$ .

Par conséquent,  $M(\mu) > \mu/(1+\mu)$ .

D'où la décroissance de  $s_a^*(\mu, W_r)$  par rapport à  $\mu$ .

### **Preuve de la proposition II.3:**

Il suffit de comparer l'utilité d'un membre de  $S \in T_c(\mu)$  à l'intérieur de la coalition  $S$  à celle qu'il obtient en respectant l'accord de coopération c'est à dire:

$$u_i \left( \frac{\mu W(S)}{s(1+\mu)}, \frac{W(S)}{1+\mu} \right) \text{ et } u_i \left( \frac{\mu W}{n(1+\mu)}, \frac{W}{1+\mu} \right).$$

On obtient alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une coalition  $S$  ait avantage à bloquer l'allocation coopérative :

$$(35) \quad \left| \begin{array}{l} s_r = s/n > \left( \frac{W_r}{1+W_r} \right)^{1+1/\mu} \\ \text{avec} \\ W_r \geq \frac{1+\mu}{\mu} \end{array} \right.$$

D'où le seuil  $s_c^*(\mu, W_r)$  qui détermine la rentabilité de la scission pour chaque coalition  $S$  en fonction d'une part, de la grandeur relative de sa taille par rapport à l'ensemble de l'économie, et d'autre part du niveau de sa richesse relative et du taux de substitution entre bien privé et public.

Il est facile de vérifier la croissance de la fonction-seuil par rapport à ses deux arguments.

En effet:

$$\frac{\partial s_c^*}{\partial W_r} = \frac{1+\mu}{\mu} \frac{1}{(1+W_r)^2} \left( \frac{W_r}{1+W_r} \right)^{1+1/\mu} > 0$$

$$\frac{\partial s_c^*}{\partial \mu} = \frac{-\ln \left( \frac{W_r}{1+W_r} \right)}{\mu^2} \left( \frac{W_r}{1+W_r} \right)^{1+1/\mu} > 0$$

### **Preuve de la proposition II.4:**

De même que précédemment, une coalition de type (b), préférera le blocage à la coopération avec les autres si l'utilité de chacun de ses membres au sein de cette même coalition est meilleure que celle qu'il obtient dans le cadre de la coopération globale, c'est à dire:

$$(36) \quad \left| \begin{array}{l} \left( \frac{\mu W}{s(1+\mu)} \right)^\mu \left( \frac{W}{1+2\mu} \right) > \left( \frac{\mu W}{n(1+\mu)} \right)^\mu \left( \frac{W}{1+\mu} \right) \\ \text{avec} \\ \frac{\mu}{1+\mu} \leq W_r \leq \frac{1+\mu}{\mu} \end{array} \right.$$

Cette condition est équivalente à:

$$(37) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{s}{n} < \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} \\ \frac{\mu}{1+\mu} \leq W_r \leq \frac{1+\mu}{\mu} \end{array} \right.$$

$$\text{Posons } sb^*(\mu) = \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu}$$

$$\frac{\partial sb^*}{\partial \mu} = - \frac{sb^*(\mu)}{\mu^2} \left( \frac{\mu}{1+2\mu} - \ln \frac{1+2\mu}{1+\mu} \right)$$

$$\text{Posons } R(\mu) = - \frac{\mu}{1+2\mu} + \ln \frac{1+2\mu}{1+\mu}$$

$$R'(\mu) = \frac{1}{1+2\mu} \left( \frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{1+2\mu} \right) > 0$$

Comme  $R(0)=0$  alors  $R(\mu) > 0$ , d'où la croissance de  $sb^*(\mu)$  en  $\mu$ .

### Preuve de la proposition II.5:

Écrivons les conditions de non profitabilité du blocage pour une coalition  $S$  de type (a) et pour la coalition complémentaire  $N-S$  de type (c) (propositions II.1 et II.2):

$$(38) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{s}{n} \geq \frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu}} (= sa^*(\mu, W_r)) \\ \frac{n-s}{n} \geq \left( \frac{W_r}{1+W_r} \right)^{1+1/\mu} \end{array} \right.$$

On peut vérifier que cette condition est équivalente à:

$$\frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu}} \leq \frac{s}{n} \leq \frac{(1+W_r)^{1+1/\mu} - 1}{(1+W_r)^{1+1/\mu}}$$

Notons:

$$(39) \quad S_{\sup}(\mu, W_r) = \frac{(1+W_r)^{1+1/\mu} - 1}{(1+W_r)^{1+1/\mu}}$$

En conclusion, à  $\mu$  et  $W_r$  donnés, les deux coalitions en présence préfèrent coopérer et respecter l'accord  $a(N)$  si:

$$(40) \quad s_a^*(\mu, W_r) \leq \frac{s}{n} \leq S_{\sup}(\mu, W_r)$$

Cette dernière condition ne peut être satisfaite que si:

$$(41) \quad \frac{1+\mu}{\mu} \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu}} < \frac{(1+W_r)^{1+1/\mu} - 1}{(1+W_r)^{1+1/\mu}}$$

C'est à dire:

$$(42) \quad \frac{W_r}{(1+W_r)^{1+1/\mu} - 1} < \frac{\mu}{1+\mu}$$

Fixons  $W_r (< 1)$  La condition (42) est alors équivalente à:

$$(43) \quad \mu < \frac{\text{Log}(1+W_r)}{\text{Log } 2 - \text{Log}(1+W_r)}$$

En tenant compte de la condition  $W_r < \frac{\mu}{1+\mu}$  (la coalition la moins riche est de type (a)), on obtient l'encadrement suivant de  $\mu$ :

$$(44) \quad \frac{W_r}{1-W_r} < \mu < \frac{\text{Log}(1+W_r)}{\text{Log } 2 - \text{Log}(1+W_r)}$$

Il est aisé de montrer que quelque soit la valeur de  $W_r (< 1)$ , la borne inférieure de l'intervalle décrit dans (II.35) est toujours inférieure à la borne supérieure. En effet, cela est équivalent à  $\frac{\text{Log}(1+W_r)}{W_r} > \text{Log } 2$ , ce qui est toujours vrai, puisque le membre de gauche est une fonction strictement décroissante sur  $]0,1[$  et bornée inférieurement par 1.

### Preuve de la proposition II.7:

Il suffit d'écrire la condition de non profitabilité du blocage pour la coalition S et N-S de types (b):

$$(45) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{s}{n} > \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} (= s_b^*(\mu)) \\ \frac{n-s}{n} > \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} \end{array} \right.$$

Cette condition est équivalente à:

$$(46) \quad \left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} < \frac{s}{n} < \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu} - 1}{\left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu}} = s_{\sup}(\mu, \frac{\mu}{1+\mu})$$

La condition (46) ne peut être vérifiée que si:  $\left( \frac{1+\mu}{1+2\mu} \right)^{1+1/\mu} < \frac{\left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu} - 1}{\left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu}}$ , c'est à dire:

$$(47) \quad \left(1 + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+1/\mu} > 2$$

Il suffit à présent d'observer que la condition (47) est toujours vraie quand  $0 < \mu \leq 1$  (le membre de gauche est décroissant par rapport à  $\mu$  et sa valeur en  $\mu=1$  est égale à  $9/4 > 2$ ).

### Preuve de la proposition II.8:

1)  $\zeta = \{S, N-S\} \in \Sigma_a^d$  ( $\{S, N-S\}$  structure de coalitions dichotomique asymétrique):

En tenant compte des équations suivantes, associées à l'équilibre de Nash et à l'accord coopératif  $a(N)$ :

$$(48) \quad \left| \begin{array}{l} y(S) = 0 \\ y(N-S) = \frac{W(N-S)}{2} \\ y = \frac{W}{2} \end{array} \right.$$

La condition (II.13) s'écrit:



$$(49) \quad \frac{W(S) \cdot W(N-S)}{W} \leq \sum_{i \in S} x_i \leq \frac{W^2 - W(N-S)}{2W}$$

Il suffit de remarquer que l'inégalité  $\frac{W(S) \cdot W(N-S)}{W} < \frac{W^2 - W(N-S)}{2W}$  est toujours vérifiée pour énoncer le résultat:

2)  $\zeta = \{S, N-S\} \in \Sigma_s^d$  (structure de coalitions dichotomique symétrique):

Les équations associées à l'équilibre de Nash et à l'accord coopératif  $a(N)$  s'écrivent:

$$(50) \quad y(N|S) \left| \begin{array}{l} y(S) = \frac{2W(S) - W(N-S)}{3} \\ y(N-S) = \frac{2W(N-S) - W(S)}{3} \\ y = \frac{W}{2} \end{array} \right.$$

La condition (II.13) s'écrit:

$$(51) \quad \frac{2W}{9} \leq \sum_{i \in S} x_i \leq \frac{5W}{18}$$

Une telle répartition est donc toujours possible.

## **Références**

- **Andreoni, J. [1988]:** "Privately Provided Public Goods in A Large Economy: The Limits of Altruism". Journal of Public Economics 35, 57-73.
- **Aumann (1961):** "The core of a cooperative game without side payments". Transaction of the AMS, 98, 539-552.
- **Bergstrom, T et Varian, H. [1985]:** "When are Nash Equilibria Independent of Distribution of Agent's Characteristics". Review of Economic Studies, 52, 715-718.
- **Bergstrom, T. , Blume, L. et Varian, H. [1986]:** "On the private provision of public goods". Journal of Public Economics, 29, 25-49.
- **Bernheim, B. Douglas [1986]:** "On the Voluntary and Involuntary Provision of Public Goods". American Economic Review 76, 789-793.
- **Bernheim, B. Douglas et Bagwell, K. [1988]:** "Is Everything Neutral ?". Journal of Political Economy, 96, 308-338.
- **Cornes, R.et Sandler T. [1985]:** "The Simple Analytics of Pure Public Good Provision". Economica, 52, 103-116.
- **Ellickson, B.[1978]:** "Public Goods and Joint Supply". Journal of Public Economics, 9, 373-382.
- **Foley (1970):** "Lindahl's solution and the core of an economy with public goods" Econometrica, 66-72
- **Fries,T.L; Golding, E.; et Romano, R. (1991):** "Private provision of public goods and the failure of neutrality property in large finite economies". International economic review, 32, 147-157.
- **Kemp, M. [1983]:** "A note on the theory of International Transfers". Economics letters, 14, 259-262.
- **Kolm S.C (1970.a):**"L'Etat et le système des prix". Dunod, Paris.

- **Kolm S.C (1970.b):** "Le service des masses". Dunod, Paris.
- **Kolm S.C (1987):** "Freedoms, Cores for Public Goods" . CERAS discussion paper n° 66 (Ecole Nationale des ponts et chaussées, Paris).
- **Kolm S.C (1988):** "Public cores" CERAS discussion paper (ENPC, Paris).
- **Kolm S.C (1989):** "Cooperative game properties of international coordination" CERAS discussion paper n° 77 (ENPC, Paris).
- **Michel, P. [1989]:** "Cours de Mathématiques pour Economistes". Ed. Economica, Paris.
- **Milleron, J.C.[1972]:** "Theory of Value with Public Goods". Journal of Economic Theory, 5, 419-477.
- **Moulin , H. [1981]:** "Théorie des jeux pour l'économie et la politique". Ed. Hermann, Paris.
- **Muench, T. [1972]:** "The Core and the Lindahl Equilibrium in an Economy with Public Goods: an Example". Journal of Economy Theory, 4, 241-255.
- **Roberts, D.J. [1974]:** "The Lindahl Solution for Economies with Public Goods". Journal of Public Economics, 3, 23-42.
- **Rosenthal, R. [1971]:** "External Economies and Cores". Journal of Economic Theory, 3, 182-188.
- **Shapley, L. et Shubik, M. [1969]:** "On the core of an economic system with externalities". American Economic Review, 59, 678-684.
- **Varian, H.R.[1992]:** "Sequential Provision of Public Goods". University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109.
- **Warr, P. [1982]:** "Pareto optimal redistribution and private charity". Journal of Public Economics, 19, 131-138.
- **Warr, P. [1983]:** "The private provision of a public good is independent of the distribution of income". Economic Letters, 13, 207-211.

## **2eme PARTIE**

### **Les problèmes de concentration en organisation industrielle**

#### **INTRODUCTION**

Les phénomènes de collusion en contexte oligopolistique ont donné une abondante littérature depuis que Stigler [1950, 1966], releva un facteur intrinsèque d'instabilité de tels phénomènes, à savoir la plus grande profitabilité pour les firmes à rester en dehors d'un tel processus coopératif. Les firmes préférant "laisser faire" la coopération plutôt que d'y prendre part, on se trouve, devant un frein efficace à l'évolution du marché vers des structures concentrées. En fait, s'il s'agit de fusion, la menace vient du peu d'empressement des firmes à y participer (ils obtiennent de meilleurs profits en observant la fusion). S'il s'agit de cartels, s'ajoute une menace supplémentaire: les firmes conservant leur indépendance<sup>5</sup>, certains membres peuvent décider de trahir l'accord coopératif conclu.

L'analyse de ces processus de collusion a donné naissance à deux types de littératures, une traitant des problèmes de fusion-acquisition (voir par exemple les travaux de Salant, Switzer, Reynolds [1983], Deneckere, Davidson [1984, 1985]) et l'autre des processus de cartellisation (entre autres D'Aspremont, Gabszewicz, Jacquemin et Weymark [1983], Porter [1983], Donsimoni [1985], Postlewaite et Roberts [1977]...).

Dans le chapitre III, nous exposons le modèle général qui sert de base à l'ensemble des questions que nous soulevons que cela soit dans un contexte de fusion ou de cartellisation. Nous nous plaçons dans un contexte de différenciation horizontale et supposons qu'une firme multi-produits est confrontée à une frange concurrentielle composée d'un nombre fini d'établissements indépendants. Tous les établissements sont supposés installés sur le marché et disposés symétriquement sur un cercle de périmètre unité (modèle de Salop [1979]). Nous supposons dans un premier temps que la chaîne d'établissements appartenant à la firme multi-produits est "continue" dans le sens où tous ces établissements sont disposés de façon adjacente sur le cercle. Un jeu s'établit alors entre la firme multi-produits (à travers ses différents établissements) et les établissements indépendants de la frange concurrentielle. Nous montrons l'existence et l'unicité d'un équilibre de Nash symétrique. Nous comparons à

---

<sup>5</sup> Dans certains cas, il peut arriver que des transferts latéraux aient lieu à l'intérieur du cartel et donc que le profit des participants ne se limite pas d'une façon irréversible à leur profits individuels. Ces transferts vont dans le sens d'un renforcement du cartel (Cramton et Palfrey [1986], Kihlstrom et Vives [1988]).

l'équilibre, les prix, parts de marchés, et profits de tous les établissements en place ainsi que leur évolution selon les différentes variations possibles des paramètres (taille de l'industrie, de la firme multi-produits et de la frange). Dans un deuxième temps, nous supposons que l'ensemble des établissements de la firme multi-produits n'est plus connexe. Nous caractérisons alors l'équilibre de Nash associé et effectuons le même travail de comparaison que précédemment.

Dans le chapitre IV, nous analysons différents problèmes liés à la stabilité des opérations de fusion et de cartellisation. Trois parties composent ce chapitre. La première consiste en une brève analyse du contexte de fusion-acquisition notamment à travers le phénomène classique de *free-riding* qui y est associé. La deuxième partie est consacrée à la stabilité d'un cartel vis à vis de la menace de défection d'un de ses membres ("trahison" de l'accord). La troisième partie étudie la stabilité du cartel et en général de la structure du marché quand dans un cadre de libre entrée.

Dans la première partie, nous reprenons le modèle du premier chapitre et les résultats qui y sont obtenus, nous supposons toutefois que la firme multi-produits cherche à fusionner avec des établissements extérieurs, en vue d'accroître sa gamme, de réduire l'intensité de la concurrence et de permettre ainsi une élévation générale des prix débouchant sur une amélioration de son profit. Dans un contexte de fusion, les firmes participantes maximisent leur profit joint tout en opérant si nécessaire les transferts latéraux qui rendent le profit de chacune meilleure que dans la situation initiale de concurrence. C'est ainsi que nous analysons l'incitation à fusionner selon que celle-ci augmente ou diminue le profit joint des firmes participantes. Le problème est de déterminer les facteurs qui concourent à freiner ou à favoriser la multiplication des fusions et donc la convergence vers une situation de monopole. Salant, Switzer et Reynolds [1983], Davidson et Deneckere [1984] montrent que dans un modèle de Cournot, la fusion réduit le profit joint des entreprises et donc compromet les chances de réalisation. La situation est différente dans les modèles de concurrence en prix. Deneckere et Davidson [1985] montrent qu'il y'a toujours dans un tel cadre, incitation à fusionner car la fusion augmente toujours la somme agrégée des profits des participants. Ils montrent également le bien fondé de l'observation de Stigler, à savoir que c'est aux firmes restées en marge du processus que cette fusion profite le plus. Ce phénomène, appelé "*free-riding*" ou problème du "cavalier seul" va focaliser l'attention d'un grand nombre d'auteurs et va constituer l'argument le plus marquant pour expliquer les difficultés des processus de collusion. Nous montrons en s'appuyant sur notre modèle, que ce phénomène n'est pas systématique. Nous produisons des exemples donnant une idée de la façon dont la taille relative de la firme multi-produits (par rapport à celle de l'industrie) détermine l'existence du "*free-rider*".

Dans la deuxième partie, nous supposons que la firme multi-produits est en fait un cartel composé d'un nombre fini de firmes en concurrence avec une frange composée d'un nombre également fini de firmes. A la différence d'un contexte de fusion, les firmes regroupées dans

un cartel n'abdiquent en rien leur souveraineté, et certaines peuvent à tout moment se désolidariser des autres partenaires. A l'intérieur des cartels, les transferts monétaires ne sont pas admis ou tout au moins ne sont pas systématiques, si bien qu'un membre ne peut compter sur une éventuelle redistribution de profit à l'intérieur du cartel pour y améliorer sa position. Outre l'existence du phénomène de free-riding observé lors d'une fusion, s'ajoute alors un problème spécifique qui découle directement de l'indépendance supposée des firmes dans un tel contexte: la menace de "trahison" de l'accord coopératif conclu entre les membres du cartel. En effet, un cartel se forme pour engager un processus d'élévation des prix (ou diminution d'output) afin d'approcher le plus près possible la position du monopole. La "trahison" consiste alors dans la déviation d'un membre du cartel de la stratégie coopérative conjointement décidée (prix ou output). Stigler [1966] (mais aussi Posner [1976]), suggéra l'idée que l'accord donnant naissance à la constitution d'un cartel est d'autant plus facile à conclure et à préserver que les produits sont homogènes. Il faut cependant tenir compte du fait que la trahison s'avère plus profitable en présence de produits homogène en raison de l'importance de l'élasticité de demande des firmes (Davidson [1983]). D'un autre côté, et pour la même raison, comme le note Ross [1992], la répression des déviations par chute des prix est plus sévère dans un contexte non différencié. S'impose donc la question du lien qui peut exister entre le degrés de différenciation et la stabilité des cartels. C'est l'objectif par exemple des travaux de Ross [1992], Chang [1991]. Ils montrent la difficulté à soutenir la collusion quand le degré de substituabilité des produits est trop grand. D'une façon générale, relativement peu de travaux se sont orientés vers l'analyse de la collusion sur un marché différencié et notre modèle s'inscrit aussi dans le prolongement du type d'interrogation contenu dans les deux travaux précédents. Le modèle (défini sur un marché différencié), à la différence des modèles traditionnellement utilisés pour traiter de la stabilité des collusions (Davidson et Deneckere [1984], Deneckere et Davidson [1985]), les prix à l'intérieur du cartel sont naturellement différenciés comme sont différenciés les prix à l'intérieur de la frange. Cela, correspond à l'idée qu'une différenciation des prix traduit simplement les différences de degré de substituabilité (qui se traduit par les différences de localisation) entre d'une part, les membres du cartel entre eux et d'autre part, ces firmes et les établissements de la frange. L'idée que nous avançons est que la stabilité d'un cartel dans un contexte de concurrence par les prix dépend directement du critère d'agrégation en regard de la position de chaque membre du cartel vis à vis de la concurrence extérieure. Un critère adopté peut avoir pour effet de favoriser certains membres et il est alors possible de repérer les membres du cartel qui profitent le moins de cet accord et qui sont susceptibles de ne pas le respecter. Le modèle présente ainsi l'avantage de permettre cette analyse et donc la détection des "zones" les plus vulnérables du cartel (vis à vis de la trahison), et leur évolution quand la taille de celui ci augmente. On montre entre autres qu'en général, les établissements périphériques (les plus proches de la concurrence extérieure) n'ont jamais avantage à se désolidariser du cartel, alors que les établissements adjacents à cette périphérie sont fortement prédisposés à trahir l'accord. D'un point de vue conceptuel, nous

nous appuyons sur des notions de stabilité proposée par D'Aspremont, Gabszewicz, Jacquemin et Weymark [1983] et qui constituent un apport fondamental dans l'analyse théorique de la stabilité des cartels. Dans un contexte de produits homogènes, sont définis en effet, des concepts pertinents de stabilité (intérieure et extérieure). Ces notions, en intégrant les interactions entre le cartel et les firmes extérieures, proposent les règles sur la base de quoi doit s'opérer l'extension du cartel pour aboutir à la position de concentration maximale du marché, c'est à dire le monopole. Un cartel est dit stable intérieurement si aucun membre n'a avantage à rejoindre la concurrence extérieure. Il est dit stable extérieurement si aucune autre firme de la frange (concurrence extérieure) n'a avantage à le rejoindre. Ces concepts sont toutefois spécialement définis pour un contexte d'industrie à produits homogènes qui induit une égalité des profits des membres du cartel. Nous proposons une adaptation de ces notions à la lumière des spécificités de notre modèle, à même d'intégrer la présence de différenciation existante entre les profits que cela soit à l'intérieur ou à l'extérieur du cartel. Nous donnons alors quelques exemples de cartels stables à la fois intérieurement qu'extérieurement en faisant varier la taille relative de ces derniers.

Le dernier point sur lequel nous voulons insister est le suivant. Le modèle de Jacquemin et Alii se base sur une hypothèse largement utilisée dans la littérature: l'hypothèse de "price leadership" du cartel. L'idée, déjà suggérée par Markham [1951], selon laquelle ce processus observé sur les marchés cacherait en fait d'illicites collusions, a été reprise et enrichie pour enfin être à la base de nombreux travaux sur la stabilité des cartels (voir par exemple Donsimoni, MacLeod [1984], Donsimoni, Economides, Polemarchakis [1986], Donsimoni [1985]). C'est dans ce cadre, que Jacquemin et alii montrent l'existence pour une taille finie de l'industrie, d'un cartel stable (c'est à dire, à la fois intérieurement et extérieurement). Le point fondamental qui semble limiter quelque peu la portée de ces travaux est justement l'utilisation de cette hypothèse de leadership prêtée au cartel. D'Aspremont, Gabszewicz, Jacquemin et Weymark [1983], formulent eux mêmes en conclusion à leur article, des réserves associées à cette hypothèse. En effet, la plus importante critique qu'on peut apporter à cette dernière est ses étroites options stratégiques. Les firmes ont seulement deux options: choisir de faire partie du cartel dominant et adopter le prix en vigueur ou faire partie de la frange et adopter le prix que la frange détermine en "preneuse" de prix (du cartel). Les firmes représentant cette concurrence extérieure sont dites alors "free-riders" car profitant plus que les autres de la cartellisation. Il ressort donc que le phénomène de trahison est imparfaitement pris en charge dans ce type de modèle. Cette observation, qui nous semble fondamentale, nous a conduit à construire le modèle sur la base des équilibres stratégiques classiques de théorie des jeux. Le jeu est à la fois coopératif (entre les membres du cartel) et non coopératif (un équilibre de Nash s'établit entre le cartel et les autres firmes de la frange). C'est dans ce cadre, que nous analysons le problème de la stabilité de l'accord en prix par rapport à la menace de défection d'un des membres du cartel ("trahison").

La dernière partie du chapitre IV est consacrée à l'autre facteur potentiel de déstabilisation des cartels, à savoir l'entrée d'une nouvelle entreprise sur le marché. Nous nous plaçons alors dans un cadre de libre entrée et suivant la localisation choisie par un entrant potentiel, comparons les profits obtenus et les chances de réussite de cette entrée. Tout en déduisant les localisations qui rendent possible cette entrée, nous donnons celle qui procure un profit maximum à l'entrant. Nous analysons les possibilités pour le cartel de se prémunir contre cette menace d'entrée en recherchant une politique de prix limite qui ne remette pas en cause la cohésion du cartel, c'est à dire la non-trahison de l'accord. Nous envisageons enfin le cas où l'entrant rejoint le cartel (augmentation de la taille de celui ci, celle de la frange restant fixe). Nous analysons l'impact de cette entrée sur les prix, parts de marché et profits de différents établissements de l'industrie en fonction de la taille de celle ci et de celle du cartel.



## **CHAPITRE III**

### **FIRME MULTI-PRODUITS ET CONCURRENCE EXTERIEURE**

#### **III.1. Cadre d'analyse**

Le marché est représenté par un cercle de périmètre unité où sont répartis à la fois les consommateurs (suivant une loi uniforme) et un nombre  $N$  d'établissements appartenant à un nombre donné de firmes (modèle de Salop [1979], variante du modèle d'Hotelling [1929]). Le nombre maximal de ces établissements actifs est déterminé selon la valeur d'un coût fixe  $C_f$  d'entrée sur ce marché. Les firmes produisent le même bien (différencié) avec un coût marginal de production supposé constant (que nous prendrons nul sans perte de généralité). Un consommateur  $x$  achètera une unité de bien à l'établissement qui lui coûtera le moins, c'est à dire qui minimisera :

$$(III.1) \quad U_i(x) = p_i + [d(i,x)]^2 \quad i=1, \dots, N$$

où  $d(i,x)$  est la distance la plus courte que doit parcourir le consommateur pour acheter le bien à l'établissement  $i$ ,  $[d(i,x)]^2$ , le coût de transport associé à la distance  $d(i,x)$ <sup>6</sup> et  $p_i$ , le prix auquel est vendu le bien par l'établissement  $i$ .

Réparties symétriquement sur le cercle, les établissements vendent le même bien (différencié par la variété). Pour tout  $N$ -uplet  $(p_1, \dots, p_N)$  de prix affichés par les  $N$  établissements en place sur le marché, l'expression de la fonction de bénéfice individuel de l'établissement  $i$  s'écrit:

$$(III.2) \quad B_i(p_1, \dots, p_N) = p_i D_i(p_1, \dots, p_N) \quad i=1, \dots, N$$

où  $D_i(\cdot)$  désigne la fonction de demande associée à l'établissement  $i$ .

Par ailleurs, quand  $i=1$ , l'établissement  $(i-1)$  désignera l'établissement  $N$  et quant  $i=N$ , l'établissement  $(i+1)$  désignera l'établissement  $1$ .

---

<sup>6</sup> Le coût de transport quadratique assure l'existence de l'équilibre en prix (D'Aspremont, Gabszewicz et Thisse [1979]).

L'existence du coût fixe  $C_f$  nous contraint à n'envisager que les équilibres en prix qui donnent une part de marché non nulle aux établissements en place, si bien que les seuls concurrents directs d'un établissement  $i$  sont les établissements  $i-1$  et  $i+1$  qui lui sont adjacents. On note alors:

$$\begin{aligned} D_i(p_1, \dots, p_N) &= D_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) \\ B_i(p_1, \dots, p_N) &= B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) \quad i=1, \dots, N \end{aligned}$$

$$(III.3) \quad \left| \begin{array}{l} D_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = -N p_i + \frac{N}{2} (p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{N} \quad \text{si } p_i < \frac{1}{2} (p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{N^2} \\ D_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = 0 \quad \text{si } p_i \geq \frac{1}{2} (p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{N^2} \end{array} \right.$$
$$(III.4) \quad \begin{aligned} B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) &= -N p_i^2 + N \left( \frac{1}{2}(p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{N^2} \right) p_i \\ &\quad \text{si } p_i < \frac{1}{2}(p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{N^2} \\ B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

101

Les entreprises s'installent sur le marché moyennant le coût fixe  $C_f$  qu'elles doivent nécessairement couvrir par le profit. D'où la condition de viabilité d'un établissement  $i$ :

$$(v) \quad B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) \geq C_f$$

On peut alors définir l'ensemble des vecteurs prix pour lesquels  $N$  établissements sont viables:

$$v_N(C_f) = \{(p_1, \dots, p_N) \in [0, +\infty[^N / \forall i \in \{1, \dots, N\}, B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) \geq C_f\}$$

### **III.2. Cas de $N$ firmes mono-produits ( $n=1$ )**

Ce cas particulier correspond au cas classique d'une concurrence à la Bertrand-Nash entre  $N$  établissements indépendants.

#### **Définition III.1**

Un équilibre de Bertrand-Nash entre les  $N$  établissements indépendants est un vecteur de prix  $(p_1^* \dots, p_n^*)$  tel que:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, B_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \dots, p_N^*) < B_i(p_1^*, \dots, p_N^*) \quad \forall p_i \in \mathbb{R}^+$$

#### **Proposition III.1**

L'équilibre de Nash en prix est donné par:

$$(III.5) \quad p_i^* = \frac{1}{N^2} \quad i=1, \dots, N$$

#### **Preuve**

A  $p_{i-1}$  et  $p_{i+1}$  donnés, tout établissement  $i$  ( $i=1, \dots, N$ ) réagit en affichant:

$$p_i = \arg \max_{p_i \in \mathbb{R}^+} B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})$$

L'équilibre de Nash est alors donné par les conditions du premier ordre:

$$(III.6) \quad p_i = \frac{1}{4}(p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{2N^2} \quad i=1, \dots, N$$

Le système (III.6) est un système d'équations linéaires récurrentes à coefficients constants dont la solution est la somme d'une solution du système d'équations homogènes associés et d'une solution particulière. On donnera plus loin une démonstration dans un cas plus général.

Si  $D_i^*$  et  $B_i^*$  désignent respectivement la part de marché et le profit de l'établissement  $i$  à l'équilibre, il vient:

$$(III.7) \quad \left| \begin{array}{l} D_i^* = \frac{1}{N} \\ B_i^* = \frac{1}{N^3} \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, N$$

### **Viabilité**

Si l'équilibre de Nash s'établit, le nombre maximal  $S$  de firmes viables sur le marché est (condition de profit nul):

$$(III.8) \quad S = E \left( \frac{1}{C_f^{1/3}} \right)$$

(  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$  )

C'est à dire:

$$(p_1^*, \dots, p_N^*) \in v_N(C_f) \Leftrightarrow N \leq E \left[ \frac{1}{C_f^{1/3}} \right]$$

## **III.3. Firme multi-produits $G$ et concurrence extérieure ( $n > 1$ )**

### **III.3.1. $G$ connexe**

Nous supposons dans cette section que la firme  $G$  détient  $n$  établissements adjacents. Nous appelons cette chaîne d'établissements adjacents  $G_n$ , c'est à dire:  $G_n = \{1, \dots, n\}$ . De la même façon, nous notons  $F_q = \{n+1, \dots, n+q\}$  la suite continue de  $q$  établissements adjacents composant la frange concurrentielle.

On définit sous forme normale le jeu en prix qui s'établit entre les firmes par les espaces de stratégies  $X_i=[0,+\infty[$  (pour  $i= n+1,...,n+q$ ),  $X_G=[0,+\infty]^n$  (pour la firme multi-produits  $G_n$ ). Autrement dit, chaque firme appartenant à la frange choisit un prix (dans  $[0,+\infty[$ ) en prenant comme donné le prix affiché par tous les autres établissements de l'industrie alors que la firme  $G_n$  choisit (dans  $[0,+\infty]^n$ ) un vecteur de prix associé à l'ensemble de ses établissements, prenant comme donné les prix affichés par la frange. Pour choisir son prix, chaque établissement  $i$  de la frange maximise son profit  $B_i$  ( $i=n+1,...,n+q$ ) alors que pour choisir son vecteur prix, le groupe industriel  $G_n$ , maximise la somme des profits de ses établissements  $B_{G_n} = \sum_{i=1}^n B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})$ . Il s'établit alors un équilibre de Bertrand-Nash entre la firme  $G_n$  et les  $q$  établissements extérieurs une fois que tous les joueurs sont installés sur le marché.

Adoptons la notation suivante pour les valeurs d'équilibre des paramètres:

$p_N(i, G_n)$ ,  $D_N(i, G_n)$ ,  $B_N(i, G_n)$  désignent respectivement le prix, part de marché et profit d'équilibre de l'établissement  $i$  quand il appartient au groupe  $G_n$  et quand la taille de l'industrie est  $N$  (ou, quand la frange compétitive est composée de  $q=N-n$  établissements).

$p_N(i, F_q)$ ,  $D_N(i, F_q)$ ,  $B_N(i, F_q)$  désignent respectivement le prix, part de marché et profit d'équilibre de l'établissement  $i$  quand il appartient à la frange  $F_q$  et quand la taille de l'industrie est  $N$  (ou, quand la firme multi-produits détient  $n=N-q$  établissements).

Si on se limite à la recherche d'un équilibre de Nash en prix qui assure des parts de marchés non nulles aux établissements installés alors:

### **Proposition III.2**

L'équilibre de Nash existe et est unique. Il est donné par les relations:

$$(III.9) \left\{ \begin{array}{l} p_N(i, G_n) = \frac{1}{2N^2} \left[ 1 + \frac{(n-1).e_{1,q}}{2-e_{1,q}} + (n+1)i - i^2 \right] \quad i=1, \dots, n \\ p_N(n+k, F_q) = \frac{1}{N^2} \left[ 1 + \frac{(n-1).e_{k,q}}{2-e_{1,q}} \right] \quad k= 1, \dots, q \\ \text{avec } e_{k,q} = \alpha_k - (\alpha_k - \beta_k) \cdot \frac{1 - \alpha_{q+1}}{\beta_{q+1} - \alpha_{q+1}}, \quad \alpha_k = (2+\sqrt{3})^k \text{ et } \beta_k = (2-\sqrt{3})^k. \end{array} \right.$$

### **Preuve**

La firme multi-produits  $G_n$  détermine un vecteur de prix  $(p_1, \dots, p_n)$  qui maximise la somme des profits de tous ses établissements. Ecrivons la fonction objectif de cette firme:

$$B_{G_n} = \sum_{i=1}^n B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = B_1(p_{n+q}, p_1, p_2) + \sum_{i=2}^{n-1} B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) + B_n(p_{n-1}, p_n, p_{n+1})$$

La firme multi-produit a un contrôle direct de tous les prix sauf  $p_{n+1}$  et  $p_{n+q}$  affichés par les établissements périphériques de la frange et qui influent directement sur ses établissements 1 et n.

Cela étant posé, et  $p_{n+1}$  et  $p_{n+q}$  étant donnés, la firme  $G_n$  doit résoudre le programme:

$$\max_{p_1, \dots, p_n} \sum_{i=1}^n B_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})$$

D'où les conditions du premier ordre:

$$(III.10) \left| \begin{array}{l} p_i = \frac{1}{2} (p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{2N^2} \quad i = 2, \dots, n-1 \\ p_1 = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{4} p_{n+q} + \frac{1}{2N^2} \\ p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{2N^2} \end{array} \right.$$

Considérons à présent les établissements de la frange concurrentielle et rappelons que par convention,  $p_{n+q+1} = p_1$ . A  $p_{n+1}$  et  $p_{n+k+1}$  donnés, un établissement  $n+k$  ( $k = 1, \dots, q$ ) appartenant à la frange affiche un prix solution du problème:

$$\max_{p_{n+k} \in \mathbb{R}^+} B_{n+k}(p_{n+1}, p_{n+k}, p_{n+k+1})$$

D'où les conditions du premier ordre:

$$(III.11) \left| \quad p_{n+k} = \frac{1}{4} (p_{n+k-1} + p_{n+k+1}) + \frac{1}{2N^2} \quad k = 1, \dots, q \right.$$

Il nous faut résoudre le système global (III.10) et (III.11). D'abord, résolvons le système (III.10) qui nous donnera le vecteur de meilleure réponse  $(p_i)_{i=1, \dots, n}$  de la firme  $G_n$  aux prix affichés par les établissements  $n+q$  et  $n+1$  adjacents à sa périphérie. On fera ensuite de même pour le système (III.11).

Reécrivons les systèmes (III.10) et (III.11):

$$\left| \quad p_i = \frac{1}{2} (p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{2N^2} \quad i = 2, \dots, n-1 \right.$$

$$(III.12) \left| \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{4} p_{n+q} + \frac{1}{2N^2} \\ p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{2N^2} \end{array} \right.$$

$$(III.13) \left| \begin{array}{l} p_{n+k} = \frac{1}{4} (p_{n+k-1} + p_{n+k+1}) + \frac{1}{2N^2} \quad k=2, \dots, q-1 \\ p_{n+1} = \frac{1}{4} (p_n + p_{n+2}) + \frac{1}{2N^2} \\ p_{n+q} = \frac{1}{4} (p_1 + p_{n+q-1}) + \frac{1}{2N^2} \end{array} \right.$$

### Prix d'équilibre des établissements de la firme G:

Résoudre le problème (III.12) revient à chercher la solution d'un système de  $(n-2)$  équations de récurrence linéaires à coefficients constants d'ordre 2 avec la donnée de deux "conditions initiales" que sont les deux dernières équations du système (voir par exemple Archinard et Guerrien [1988], pp.475-492).

Par conséquent, toute solution du système (III.12) est une solution du système d'équations homogènes associées (conditions initiales exclues) additionnée à une solution particulière du système (III.12).

Considérons donc les équations homogènes associées au système (III.12):

$$(III.14) \quad \frac{1}{2} p_{i-1} - p_i + \frac{1}{2} p_{i+1} = 0 \quad i = 2, \dots, n-1$$

L'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 2. En en déterminant une base, on génère tous les vecteurs appartenant à cet espace. Pour cela, cherchons les solutions du type  $p_i = \mu^i$  avec  $\mu > 0$ .

La seule solution de ce type est  $\mu_0 = 1$

Par ailleurs,  $(i \mu_0^i)$  est également une solution. De plus, elle est linéairement indépendante de  $(\mu_0^i)$ .

La solution générale du système d'équations homogènes s'écrit donc:

$r (\mu_0^i) + s (i \mu_0^i)$  avec  $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ , c'est à dire  $(r+s i)_{i=2, \dots, n-1}$

Déterminons à présent une solution particulière du système:

$$(III.15) \quad \frac{1}{2} p_{i-1} - p_i + \frac{1}{2} p_{i+1} = - \frac{1}{2N^2} \quad i = 2, \dots, n-1$$

On peut vérifier qu'une constante (polynôme de degrés 0 en  $i$ ) ou un polynôme en  $i$  de degré 1 ne sont pas solutions. Par contre, en passant à un degré immédiatement supérieur, c'est à dire en cherchant une solution de la forme  $p_i = a \cdot i^2$  il vient:  $a = -\frac{1}{2N^2}$ .

Par conséquent, une solution générale du système (III.15) est telle que:

$$(III.16) \quad p_i = r + s \cdot i - \frac{1}{2N^2}$$

La solution du système (III.12) sera déduite de la prise en compte des deux conditions initiales:

$$(III.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{4} p_{n+q} + \frac{1}{2N^2} \\ p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{2N^2} \end{array} \right.$$

En appliquant (III.16) dans (III.17), il vient:

$$r = \frac{1}{2} p_{n+1} \quad \text{et} \quad s = \frac{p_{n+q} - p_{n+1}}{2(n+1)} + \frac{n+1}{2N^2}$$

Le système de prix de meilleure réaction de la firme  $G_n$  aux prix  $p_{n+q}$  et  $p_{n+1}$  est alors:

$$(III.18) \quad p_i = \frac{1}{2} p_{n+q} + \frac{1}{2} \left( \frac{p_{n+1} - p_{n+q}}{n+1} + \frac{n+1}{N^2} \right) i - \frac{1}{2N^2} i^2 \quad i = 1, \dots, n$$

#### Prix d'équilibre affichés par les établissements de la frange:

Une solution particulière du système d'équation (III.13) (les deux conditions initiales exclues) est  $p_i = \frac{1}{N^2}$ . De plus, on vérifie que la solution du système d'équations homogènes associées est de la forme:

$$(III.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{n+k} = u \cdot (2+\sqrt{3})^k + v \cdot (2-\sqrt{3})^k \quad k = 1, \dots, q \\ \text{avec } u = u(p_n, p_1) \text{ et } v = v(p_n, p_1) \text{ des nombres réels.} \end{array} \right.$$

Posons  $\alpha_k = (2+\sqrt{3})^k$  et  $\beta_k = (2-\sqrt{3})^k$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont déterminées en tenant compte des "conditions initiales", c'est à dire :

$$(III.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} = \frac{1}{4} (p_n + p_{n+2}) + \frac{1}{2N^2} \end{array} \right.$$



$$p_{n+q} = \frac{1}{4} (p_1 + p_{n+q-1}) + \frac{1}{2N^2}$$

En appliquant la relation (III.19) dans (III.20), il vient :

$$(III.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(p_n, p_1) = \frac{\beta_{q+1}}{\Delta_q} p_n - \frac{1}{\Delta_q} p_1 + \frac{1 - \Delta_q + \alpha_{q+1}}{\Delta_q N^2} \\ v(p_n, p_1) = \frac{1}{\Delta_q} p_1 - \frac{\alpha_{q+1}}{\Delta_q} p_n - \frac{1 + \alpha_{q+1}}{\Delta_q N^2} \end{array} \right.$$

Avec  $\Delta_q = \beta^{q+1} - \alpha^{q+1}$

Les prix de meilleure réaction des établissements de la frange aux prix  $p_n$  et  $p_1$  affichés à l'extérieur sont donc donnés par les relations:

$$(III.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{n+k} = u(p_n, p_1) \cdot (2 + \sqrt{3})^k + v(p_n, p_1) \cdot (2 - \sqrt{3})^k \quad k=1, \dots, q \\ \text{Avec:} \\ u(p_n, p_1) = \frac{\beta_{q+1}}{\Delta_q} p_n - \frac{1}{\Delta_q} p_1 + \frac{1 - \Delta_q + \alpha_{q+1}}{\Delta_q N^2} \\ v(p_n, p_1) = \frac{1}{\Delta_q} p_1 - \frac{\alpha_{q+1}}{\Delta_q} p_n - \frac{1 + \alpha_{q+1}}{\Delta_q N^2} \\ (\Delta_q = \beta^{q+1} - \alpha^{q+1}) \end{array} \right.$$

### Équilibre de Nash:

Il s'agit donc de chercher le système de prix  $(p_1, \dots, p_{n+q})$  solution du système (III.10) et (III.11). Il suffit alors simplement de chercher un tel système de prix solution des systèmes (III.18) et (III.22), et nous obtenons les prix d'équilibre:

$$(III.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_N(i, G_n) = \frac{1}{2N^2} \left[ 1 + \frac{(n-1) \cdot e_{1,q}}{2 - e_{1,q}} + (n+1)i - i^2 \right] \quad i=1, \dots, n \\ p_N(n+k, F_q) = \frac{1}{N^2} \left[ 1 + \frac{(n-1) \cdot e_{k,q}}{2 - e_{1,q}} \right] \quad k=1, \dots, q \\ \text{Avec } e_{k,q} = \alpha_k - (\alpha_k - \beta_k) \cdot \frac{1 - \alpha_{q+1}}{\beta_{q+1} - \alpha_{q+1}} \end{array} \right.$$

Le modèle étant symétrique, on cherchera une solution qui vérifie cette propriété, c'est à dire telle que les prix affichés aux "bords" (firmes 1 et n) de la coalition (1,...,n) soient égaux ainsi que ceux affichés par les établissements périphériques de la frange concurrentielle. En dérivant  $p_N(n+k, F_q)$  par rapport à k (q étant fixé), on déduit que les prix affichés par la frange décroissent à mesure que l'on se dirige vers les établissements centraux, c'est à dire que l'on s'éloigne de la "zone" de collusion (1,...,n) où la concurrence est relativement moins intense. Ses établissements (n+1 et n+q), les plus proches des établissements périphériques de la coalition, affichent un prix plus bas que ceux affichés par les établissements n et 1 (périphérie de la coalition). Par ailleurs, en dérivant  $p_N(n+k, F_q)$  par rapport à q (à n fixé), on déduit que le prix affiché par tout établissement k décroît à mesure que le nombre q d'établissements de cette frange augmente.

Au centre de la coalition (1,...,n), les prix sont les plus élevés. Ils s'amenuisent à mesure que l'on s'approche de la périphérie (dérivation de  $p_N(i, G_n)$  par rapport à i, à n et N fixés).

### Parts de marché d'équilibre

L'équilibre de Nash en prix donne des parts de marchés non nulles. Elles s'écrivent:

$$(III.24) \quad \left| \begin{array}{ll} D_N(1, G_n) = D_N(n, G_n) = \frac{1}{N} + \frac{n \cdot e_{1,q} - 2}{4N(2 - e_{1,q})} & \\ D_N(i, G_n) = \frac{1}{2N} & i=2, \dots, n-1 \\ D_N(n+k, F_q) = \frac{1}{N} + \frac{(n-1) \cdot e_{k,q}}{N(2 - e_{1,q})} & k=1, \dots, q \end{array} \right.$$

Il apparaît de (III.24) que les établissements de la frange obtiennent des parts de marchés de plus en plus réduites à mesure que leur emplacement s'éloigne de la "zone de collusion" (1,...,n) (décroissance de  $D_N(n+k, F_q)$  par rapport à k).

Hormis ses établissements périphériques 1 et n (qui enregistrent des parts de marchés plus importantes), la firme  $G_n$  enregistre une demande d'égale valeur pour ses établissements "hors-périphérie". Par ailleurs, la demande adressée à ses établissements périphériques est moins importante que celle adressée à leurs concurrents directs dans la frange, c'est à dire les établissements n+1 et n+q.

### Profits d'équilibre

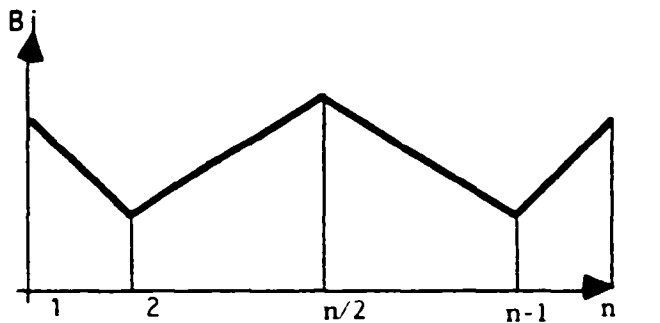
De (III.24) et (III.9), nous en déduisons les profits réalisés par les différents établissements:

$$\left| B_N(1, G_n) = B_N(n, G_n) = \frac{[n+1-e_{1,q}][(n-4)e_{1,q}+6]}{4N^3(2-e_{1,q})^2} \right.$$

$$(III.25) \quad \left| \begin{array}{l} B_N(i, G_n) = \frac{1}{4N^3} \left[ 1 + \frac{(n-1) \cdot e_{1,q}}{2-e_{1,q}} + (n+1)i - i^2 \right] \quad i=2, \dots, n-1 \\ B_N(n+k, F_q) = \frac{1}{N^3} \left[ 1 + \frac{(n-1) \cdot e_{k,q}}{2-e_{1,q}} \right]^2 \quad k=1, \dots, q \end{array} \right.$$

Les établissements 1 et n obtiennent toujours les profits les plus élevés dans  $G_n$  (figure ci dessous). Les établissements qui leurs sont adjacents (2 et  $n-1$ ) obtiennent par contre les profits les moins élevés.

Les prix affichés à la périphérie de la firme  $G_n$  donnent aux établissements (1 et n) proches de la concurrence extérieure des parts de marché très supérieures aux parts de marché des établissements qui ne sont pas soumis à la concurrence directe de la frange. Par voie de conséquence une large part du profit total de la firme  $G_n$  provient de ces établissements "satellites" (comme le montre la figure ci dessous) alors que ces établissements adoptent une politique délibérée de guerre des prix en bradant le prix du bien pour concurrencer la frange par le biais des établissements  $n+1$  et  $n+q$ .



**Profits réalisés par la firme G.**

Ainsi, les établissements qui sont les plus proches des firmes 1 et n sont crédités de profits nettement inférieurs à leurs partenaires même si l'appartenance à la coalition (1,...,n) leur apporte un surplus strictement positif par rapport à la situation antérieure.

On vérifie en effet:  $B_N(2, G_n) > B_2^*$  et  $B_N(n-1, G_n) > B_{n-1}^*$

La situation à l'intérieur de la frange est différente. Les profits sont décroissants à mesure que l'on s'éloigne des établissements 1 ou n, c'est à dire de la zone d'implantation de la firme multi-produits  $G_n$ . Les établissements les plus proches de cette zone sont ceux qui bénéficient le plus des effets externes positifs du comportement collusif des établissements 1 à n. Dans

cette zone, les prix y sont élevés mais ces effets externes s'amenuisent à mesure que l'on s'y éloigne.

Il est également intéressant de regarder l'évolution des prix, des parts de marchés et des profits quand la firme  $G_n$  fait l'acquisition progressive des établissements de la frange. Ceci revient à calculer la valeur de ces paramètres quand  $n$  varie (à  $N$  fixé).

Nous nous limitons aux établissements ayant des positions particulières au sein du cartel et de la frange. De ce fait nous allons nous intéresser aux établissements périphériques ( $n$  et  $n+1$ ), ainsi qu'à l'établissement  $n-1$ .

Les figures (III.1), (III.2), (III.3) tracées sur la base de la valeur 13 de  $N$  donnent une idée sur les variations des facteurs prix, demande et profit quand la taille de  $G_n$  augmente .

L'augmentation de taille de la firme  $G_n$  (et donc la diminution de la taille de la concurrence extérieure) entraîne en particulier une élévation générale des prix des établissements  $n-1$ ,  $n$ , et  $n+1$ . Le prix affiché par l'établissement  $n$  croît à un rythme bien plus rapide que celui de  $n-1$  et  $n+1$  (figure (III.1)), alors que c'est l'établissement  $n+1$  qui accuse la progression la plus lente.

L'établissement qui va profiter le plus de l'expansion de la firme  $G_n$  d'un point de vue tarifaire c'est donc celui qui se trouvera à la périphérie de celle ci . Par contre, du point de vue de la part de marché, c'est le phénomène inverse qui se produit (figure (III.2)). Non seulement, le concurrent direct de la périphérie de  $G_n$  (l'établissement  $n+1$ ) récupère une part de marché supérieure à celle de  $G_n$ , mais celle ci croît plus rapidement à mesure que  $n$  augmente.

Les profits de ces trois établissements augmentent à mesure que la taille  $n$  devient grande.

La figure (III.4) permet de comparer la fonction de profit de ces établissements quand  $n$  varie.

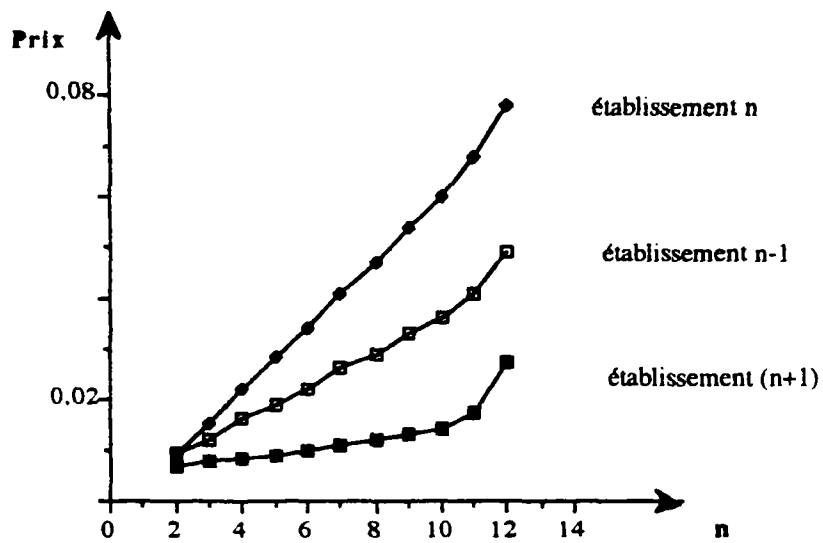


Figure III.1  
Evolution des prix à la périphérie du cartel, à l'emplacement (n-1)  
et à la périphérie de la frange.

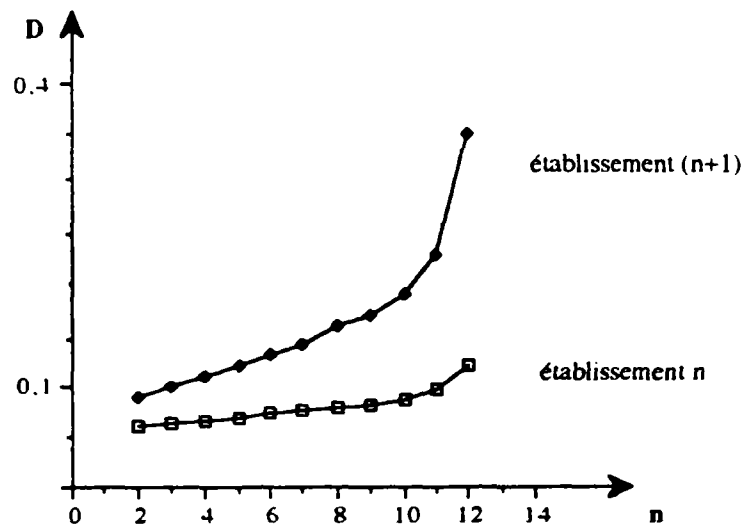


Figure III.2  
Evolution de la part de marché à la périphérie de G  
et de la frange (N=13)

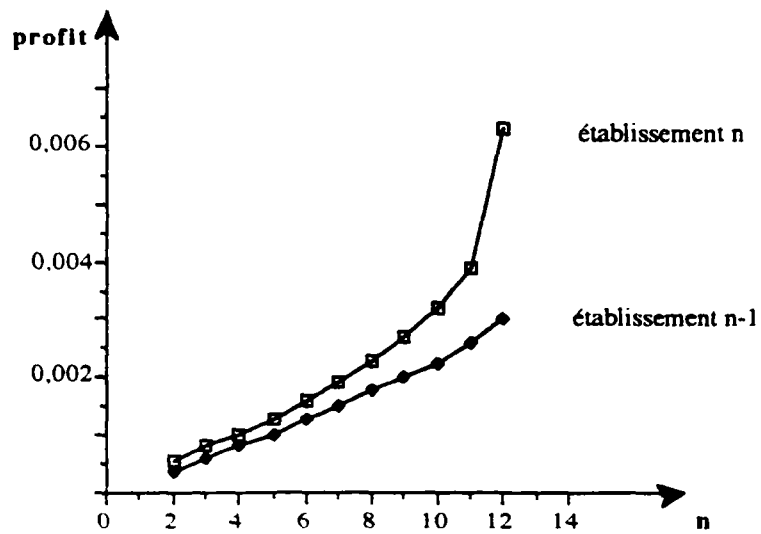


Figure III.3  
Evolution du profit des établissements n  
et n-1 de G (N=13).

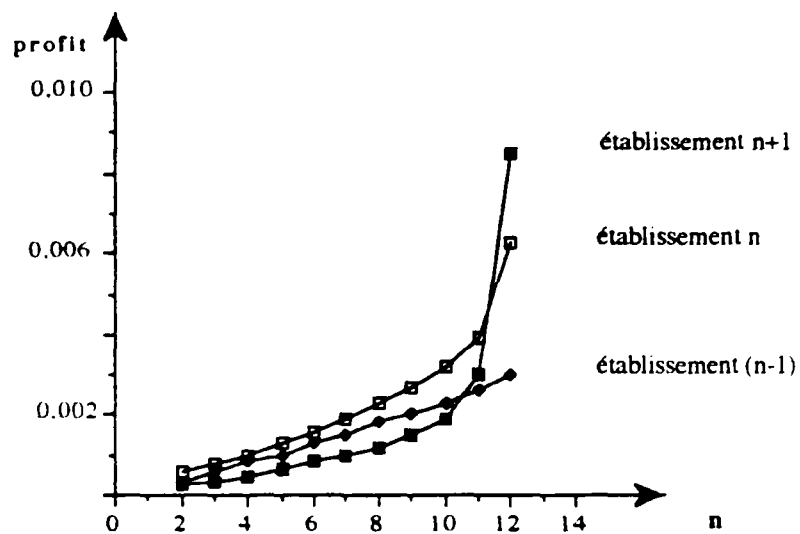


Figure III.4  
Evolution des profits aux emplacements n-1, n et  
n+1 (N=13)

### III.3.2. G non connexe

Nous terminons l'analyse par une extension du modèle au cas où l'ensemble des établissements appartenant à la firme multi-produit n'est pas connexe. Nous supposons plus précisément qu'un établissement  $j$  (appartenant à  $\{2, \dots, n-1\}$ ) est indépendant, c'est à dire appartient à la frange concurrentielle. Pour surmonter les difficultés calculatoires générées par le cas général, nous supposons que la frange est uniquement composée d'un établissement  $(n+1)$  à qui vient s'ajouter l'établissement  $j$  (rompant la chaîne des établissements appartenant à la firme multi-produits).

Nous posons ainsi l'hypothèse<sup>7</sup>:

$$(III.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = [G_{j-1}] \cup [G_n / G_j] = \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\} \\ \text{et} \\ F = F_1 \cup \{j\} = \{n+1\} \cup \{j\} \end{array} \right.$$

Sous cette hypothèse, l'équilibre de Nash s'établit entre trois joueurs: d'une part, la firme multi-produits  $G$  (qui maximise le profit agrégé des établissements de ces deux composantes connexes  $G_{j-1}$  et  $G_n / G_j$ ) et d'autre part les deux établissements indépendants  $n+1$  et  $j$  (qui maximisent leurs profits individuels). Il est toutefois utile de donner la remarque suivante dont la preuve est immédiate:

### **Remarque**

Le jeu à 3 joueurs  $G, j$ , et  $n+1$ , et le jeu à 4 joueurs  $G_{j-1}, G_n / G_j, j$  et  $n+1$ , admettent un même équilibre de Nash.

Pour  $i=1, \dots, j-1$ , soient  $p_N(i, G_{j-1})$ ,  $D_N(i, G_{j-1})$ , et  $B_N(i, G_{j-1})$  respectivement le prix, part de marché et profit d'équilibre de l'établissement  $i$  ( $i \in G_{j-1}$ ) quand l'établissement  $j$  ( $j \in \{2, \dots, n-1\}$ ) est indépendant. De même, soient  $p_N(j+i, G_n / G_j)$ ,  $D_N(j+i, G_n / G_j)$ , et  $B_N(j+i, G_n / G_j)$  pour  $i=1, \dots, n-j$ , respectivement le prix, part de marché et profit d'équilibre de l'établissement  $j+i$  ( $j+i \in G_n / G_j$ ) quand l'établissement  $j$  ( $j \in \{2, \dots, n-1\}$ ) est indépendant. Enfin,  $p_N(k, F_1 \cup \{j\})$ ,  $D_N(k, F_1 \cup \{j\})$ , et  $B_N(k, F_1 \cup \{j\})$  (pour  $k=n+1$  et  $k=j$ ) désignent respectivement le prix, part de marché et profit d'équilibre de l'établissement  $k$  quand c'est l'établissement  $j$  ( $j \in \{2, \dots, n-1\}$ ) qui "brise" la chaîne des établissements de la firme multi-produits.

### **Proposition III.3**

Sous l'hypothèse (III.26), les prix d'équilibre sont tels que:

---

<sup>7</sup>  $G_n / G_j$  désigne le complémentaire de  $G_j$  dans  $G_n$ . En général, pour deux ensembles  $A$  et  $B$ , on utilisera indifféremment dans toute la suite,  $A/B$  ou  $A-B$  pour désigner le complémentaire de  $B$  dans  $A$ .

$$\begin{aligned}
(III.27) \quad & p_N(i, G_{j-1}) = \frac{N+2}{12N^2} + \frac{j}{2N^2} i - \frac{1}{2N^2} i^2 \quad i = 1, \dots, j-1 \\
& p_N(j+i, G_{n'} \setminus G_j) = \frac{N+2}{12N^2} + \frac{n-j+1}{2N^2} i - \frac{1}{2N^2} i^2 \quad i = 1, \dots, n-j \\
& p_N(n+1, F_1 \cup \{j\}) = p_N(j, F_1 \cup \{j\}) = \frac{N+2}{12N^2}
\end{aligned}$$

### Preuve

Ainsi que nous l'avons remarqué précédemment, l'issue de Nash ne change pas que l'on considère le contexte comme celui d'un jeu à 3 joueurs ( $G, j$ , et  $n+1$ ) où celui d'un jeu à 4 joueurs ( $G_{j-1}, G_{n'} \setminus G_j, j$  et  $n+1$ ).

La chaîne d'établissements  $G_{j-1}$  agit comme une firme multi-produits confrontée à une concurrence extérieure directe représentée par les établissements  $n+1$  et  $j$ . Elle maximise la somme des profits de ses établissements à  $p_{n+1}$  et  $p_j$  donnés.

La meilleure réaction de  $G_{j-1}$  aux prix  $p_{n+1}$  et  $p_j$  est donnée par la relation (III.18): il suffit de remplacer dans cette relation  $p_{n+1}$  par  $p_j$ , et  $p_{n+q}$  par  $p_{n+1}$  (et faire varier  $i$  de 1 à  $j-1$ ).

De la même manière, la meilleure réaction de  $G_{n'} \setminus G_j$  aux prix  $p_j$  et  $p_{n+1}$  affichés à sa périphérie est obtenue à partir de la relation (III.18) en remplaçant cette fois  $p_{n+q}$  par  $p_j$ .

Sachant qu'à l'équilibre (sous l'hypothèse d'une solution symétrique):  $p_j = p_{n+1}$ , le système d'équation décrivant l'équilibre de Nash en prix s'écrit:

$$\begin{aligned}
(III.29) \quad & p_i = \frac{1}{2} p_j + \frac{j}{2N^2} i - \frac{1}{2N^2} i^2 \quad \forall i \in G_{j-1} \\
& p_i = \frac{1}{2} p_j + \frac{n-j}{2N^2} (i-j) - \frac{1}{2N^2} (i-j)^2 \quad \forall i \in G_{n'} \setminus G_j \\
& p_j = \frac{1}{4} p_{j-1} + \frac{1}{4} p_{j+1} + \frac{1}{2N^2}
\end{aligned}$$

On peut vérifier (par une démarche similaire à celle exposée dans la preuve de la proposition (III.2)) que la solution de ce système est l'équilibre de Nash en prix du jeu donnée dans la proposition (relation III.27).



A l'intérieur de chaque coalition ( $G_{j-1}$  et  $G_n/G_j$ ) , les prix sont croissants à mesure que l'on s'approche des établissements centraux. Ces derniers affichent les prix les plus élevés. L'établissement  $j$  affiche le prix le plus bas (égal à celui affiché par  $n+1$ ).

### Parts de marchés et profits

En rappelant que  $G$  désigne  $[G_{j-1}] \cup [G_n/G_j]$ , à partir des relations (III.3) et (III.4), on peut calculer les parts de marchés et les profits d'équilibre de tous les établissements installés. Il vient:

$$(III.30) \quad \left| \begin{array}{l} D_N(i, G) = \frac{1}{2N} \quad \forall i \in G - \{1, j-1, j+1, n\} \\ D_N(i, G) = \frac{N+14}{24N} \quad \forall i \in \{1, j-1, j+1, n\} \\ D_N(n+1, F_1 \cup \{j\}) = D_N(j, F_1 \cup \{j\}) = \frac{N+2}{6N} \end{array} \right.$$

De la relation (III.30), nous pouvons déduire directement le résultat:

### Propriété:

$$D_N(j, F_1 \cup \{j\}) > D_N(i, G) > D_N(k, G), \quad \forall i \in \{1, j-1, j+1, n\} \quad \forall k \in G - \{1, j-1, j+1, n\}$$

La demande la plus importante est donc adressée aux établissements indépendants  $j$  et  $n+1$ , tandis que les établissements périphériques obtiennent une part de marchés supérieure à celle obtenue par les établissements intérieures de  $G_{j-1}$  et  $G_n/G_j$ .

Écrivons les profits d'équilibre:

$$(III.31) \quad \left| \begin{array}{l} B_N(i, G_{j-1}) = \frac{1}{4N^3} \left\{ \frac{N+2}{3} + j \cdot i - i^2 \right\} \quad \forall i \in G_{j-1} - \{1, j-1\} \\ B_N(1, G_{j-1}) = B_N(j-1, G_{j-1}) = \frac{(N+14)(N-4+6j)}{288N^3} \\ B_N(i, G_n/G_j) = \frac{1}{4N^3} \left\{ \frac{N+2}{3} + (n-j+1) \cdot (i-j) - (i-j)^2 \right\}, \quad \forall i \in [G_n/G_j] - \{j+1, n\} \\ B_N(j+1, G_n/G_j) = B_N(n, G_n/G_j) = \frac{(N+14)(7N-6j-4)}{288N^3} \end{array} \right.$$

$$B_N(n+1, F_1 \cup \{j\}) = B_N(j, F_1 \cup \{j\}) = \frac{1}{N} \left( \frac{N+2}{6N} \right)^2$$

Ces relations nous permettent de déduire les propriétés:

**Propriétés:**

1- L'établissement j (et donc n+1) obtient le profit le plus élevé de l'industrie:

$$B_N(j, F_1 \cup \{j\}) = B_N(n+1, F_1 \cup \{j\}) > B_N(i, G) \quad \forall i \in G = G_{j-1} \cup G_n / G_j$$

2- Tout établissement de la firme multi-produit obtient un meilleur profit en appartenant à une composante connexe de plus grande taille:  $B_N(i, G_{j-1})$  est croissant en j et  $B_N(i, G_n / G_j)$  décroissant en j.

On peut alors énoncer un corollaire (dédit de la propriété (2)):

**Corollaire**

$$B_N(j-1, G_{j-1}) > B_N(j+1, G_n / G_j) \Leftrightarrow j > \frac{N}{2} \text{ (N pair) ou } j > \frac{N+1}{2} \text{ (N impair)}$$

Les propriétés précédentes donnent une idée des niveaux de profits obtenus par les différents établissements installés. De façon générale, nous avons donné tout au long de ce chapitre, l'essentiel des propriétés que vérifie l'équilibre de Nash issu de la confrontation entre une firme multi-produits, et une frange représentant la concurrence extérieure. Dans le chapitre suivant, nous allons analyser le modèle en supposant un processus d'expansion de la firme (acquisition de nouveaux établissements), puis, dans une ultime étape, et grâce à une extrapolation du modèle aux phénomènes de cartellisation, nous analyserons la stabilité de ces processus vis à vis des différentes menaces de destabilisation.

## **CHAPITRE IV**

### **STABILITE DE LA COLLUSION**

#### **IV.1. Stabilité de la fusion**

Supposons que la firme  $G_n$  et un établissement  $n+k$  ( $k=1, \dots, q$ ) envisagent de fusionner.

Reprenons les notations adoptées dans le premier chapitre, et rappelons notamment, que  $B_N(n+k, F_q)$  désigne le profit d'équilibre de l'établissement  $n+k$  quand il appartient à la frange et fait face à une firme multi-produits de taille  $n=N-q$  (avant l'opération d'acquisition). Par conséquent,  $B_N(n+k, G_n \cup \{k\})$  désignera le profit d'équilibre de cet établissement  $n+k$  quand il devient le  $(n+1)^{\text{ème}}$  établissement de la firme multi-produits.

##### **Définition IV.1**

On dit qu'il y'a incitation à la fusion de  $G_n=\{1, \dots, n\}$  avec l'établissement  $n+k$  si:

$$B_N(n+k, F_q) + \sum_{i=1}^n B_N(i, G_n) \leq B_N(n+k, G_n \cup \{k\}) + \sum_{i=1}^n B_N(i, G_n \cup \{k\})$$

Il y'a donc incitation à la fusion si le profit joint de la firme multi-produits après acquisition d'un établissement supplémentaire est au moins égal à la somme des profits individuels obtenus dans la situation initiale de concurrence.

Un cas trivial est celui du duopole. Reporté à notre modèle, ceci revient à considérer une firme multi-produits à  $n$  établissements en concurrence avec une firme mono-produit ( $(n+1)^{\text{ème}}$  établissement). L'issue consiste en l'absorption par la firme multi-produits du  $(n+1)^{\text{ème}}$  établissement afin d'afficher des prix infinis (situation de monopole).

Reprenons le cas général.

Soient  $B_{G_n}$ , le profit agrégé de la firme avant l'opération d'acquisition et  $B_{G'}$ , le profit agrégé de la firme après cette opération ( $G' = G_n \cup \{k\}$ ).

Si  $k \neq 1$  et  $k \neq n$ , le cas est trivial: étant donné que la fusion ne modifie en rien le prix affiché par l'établissement  $n+k$  en raison de sa localisation, les profits obtenus avant et après cette opération restent inchangés.

Si  $k=1$  ou  $k=n$ , il faut comparer  $B_{Gn} + B_N(n+k, F_q)$  et  $B_G$ . De nombreux exemples numériques donnent vraie l'inégalité:  $B_{Gn} + B_N(n+k, F_q) < B_G \quad \forall n$ .

Sans en donner une preuve rigoureuse (générale), nous proposons toutefois ce résultat:

#### **Proposition IV.1**

Il y'a toujours avantage à fusionner avec un établissement de la frange concurrentielle.

#### **Le problème du "free-riding"**

Nous allons aborder à présent, dans le cadre de la fusion, le phénomène de free-riding présenté comme un frein à la concentration industrielle. Ce comportement traduit l'existence d'effets externes de la coopération qui conduit les firmes à préférer être en dehors d'un processus de collusion plutôt que d'y participer (Stigler [1950]).

Pour tout  $k \in \{1, \dots, q\}$ , considérons l'ensemble suivant:

$$f_k = \{(n, N) \in \mathbb{N}^2 \mid n < N \text{ et } B_N(n+k, F_q) \leq B_N(n+k, G_n)\}$$

Cet ensemble est simplement l'ensemble des couples  $(n, N)$  tels que tout établissement de la frange préfère (au sens large), être partie prenante d'une fusion de  $n$  établissements plutôt que d'observer cette dernière.

#### **Proposition IV.2**

$$f_1 \neq \emptyset$$

#### **Preuve**

Comparer  $B_N(n+1, F_q)$  et  $B_N(n+1, G_n)$  revient en fait à comparer (pour des raisons de symétrie),  $B_N(n+1, F_q)$  et  $B_N(n, G_n)$ .

Nous vérifions le résultat de la proposition, en considérant par exemple le cas  $N=6$  et  $n=3$  ( $B_6(3, G_3) = 0,0083$ ,  $B_6(4, F_3) = 0,0082$ ) ou  $N=21$  et  $n=13$  ( $B_{21}(13, G_{13}) = 0,001$ ,  $B_{21}(14, F_8) = 0,0008$ ). Nous pouvons aussi constater ce résultat sur par exemple la figure III.3 (chapitre III). Ainsi pour  $N=13$ , le free-riding n'est pas observé excepté pour la taille  $n=12$  du cartel.

La proposition montre donc que l'incitation à participer à la fusion dépend crucialement de la taille de celle ci et du nombre de concurrents à l'extérieur. La menace classique du "free-riding"

n'est pas ici, systématique. Elle n'est pas pour autant évacuée comme le montrent d'autres exemples. Par ailleurs, il semble qu'il n'y ait pas monotonie dans la dissuasion de ce phénomène (comme en témoignent les cas  $N=6$  et  $n=2$  puis  $N=13$  et  $n=12$ )

Ainsi qu'il a été défini, un free-rider n'obtient pas un meilleur profit individuel en participant à la fusion mais plutôt en laissant à un autre le soin de prendre l'initiative<sup>8</sup>. En présence de transferts monétaires et pourvu que la fusion apporte un surplus conséquent pour la coalition, le "free-rider" peut revenir sur sa décision d'observer la fusion s'il est assuré de recevoir de la coalition une compensation avantageuse. Si l'on veut raisonner irréversiblement en termes de profits individuels, il devient nécessaire d'admettre une certaine autonomie des établissements même après leur absorption par la grande firme. Il convient alors d'interpréter les résultats obtenus non plus en terme de fusion mais de cartellisation.

En effet, à la différence des processus de fusion-acquisition où les établissements perdent leur indépendance, les firmes impliquées dans un processus de cartellisation ne renoncent pas à leur souveraineté, et ne s'engagent dans ce processus qu'à la condition qu'il améliore leurs profits individuels. Cette extension de l'analyse aux cartels est d'autant plus nécessaire que le comportement de "trahison" qu'on étudiera dans la section suivante ne peut se justifier dans un contexte de fusion-acquisition. Dans ce dernier contexte, les établissements ne peuvent par définition quitter la coalition à laquelle ils appartiennent même si cela leur est profitable. C'est ainsi que dans un cadre de cartellisation, la comparaison des profits  $B_N(n+1, F_q)$  et  $B_N(n+1, G_{n+1})$  acquiert un sens économique plus pertinent.

## **IV.2. Stabilité des cartels**

Nous réinterprétons le modèle en supposant que tous les établissements installés sont indépendants. cela revient à dire que chaque établissement est une firme mono-produit en compétition avec tous les autres. La coalition  $(1, \dots, n)$  est alors un cartel de  $n$  firmes qui s'entendent sur un système de prix à afficher face à une frange extérieure concurrentielle  $(n+1, \dots, n+q)$ .

Les firmes du cartel s'accordent à afficher le prix qui leur a été affecté lors de la négociation. Au moment de la fixation effective des prix, certains membres peuvent être tentés de "trahir" en déviant par rapport à l'accord coopératif initial, à travers une baisse de prix qui leur permet de s'accaparer une part de marché plus importante. Signalons que la réaction des autres firmes à ce comportement a fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Osborne [1976], se basant sur le modèle de Cournot, proposa de réagir à la trahison par une augmentation du niveau d'output, la baisse de prix qui s'ensuit étant suffisamment répressive pour décourager la déviation. Des

---

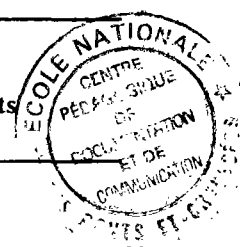
<sup>8</sup> Ce phénomène est un véritable facteur d'échec des processus de collusion. Outre Sugler [1950, 1964], voir également la discussion de ce problème dans Aumann [1973].

auteurs comme Stigler [1966] ou Posner [1976] par exemple insisterent sur le fait de distinguer le secteur où se produit cette cartellisation (industrie de produits homogènes ou différenciés). L'accord est ainsi, plus facile à conclure et à préserver que les produits sont homogènes. L'argument tient au fait que dans un tel contexte, l'intensité de la concurrence représente autant d'incitation à la mise en oeuvre d'ententes (au détriment des consommateurs). Par ailleurs, autant la trahison s'avère plus profitable en présence de produits homogène (Davidson [1983]), autant (Ross [1991]), la répression des déviations par chute des prix est plus sévère dans un contexte non différencié. En effet, dans un tel contexte, l'élasticité de demande des firmes étant plus grande, une firme qui réduit son prix enregistre un accroissement considérable de sa part de marché (la tentation de trahir l'accord est donc grande) mais la punition à l'encontre d'un membre déviant est, pour la même raison, très sévère. Ces remarques rend d'autant plus pertinente la question du lien qui peut exister entre le degrés de différenciation et la stabilité des cartels. C'est l'objectif par exemple des travaux de Ross [1992], Chang [1991], qui montrent la difficulté à soutenir la collusion quand le degré de substituabilité des produits est trop grand. Dans notre modèle, les firmes du cartel sont exposées différemment vis à vis de la concurrence extérieure. L'incitation à dévier de l'accord ne sera donc pas la même selon la firme considérée du cartel.

Reprenons le système de notation précédent:  $B_N(i, F_q \cup \{i\})$  désigne le profit d'équilibre de l'établissement  $i$  après avoir quitter la coalition  $(1, \dots, n)$ , c'est à dire en rejoignant la frange concurrentielle extérieure ( $F_q = \{n+1, \dots, n+q\}$ ), et  $B_N(i, G_n)$ , désigne son profit au sein de la coalition à  $n$  établissements.

Résumons les diverses situations possibles dans le tableau suivant:

Structure du marché	Issue	Notation des profits
Situation initiale: N firmes indépendantes	Équilibre de Nash entre les $n+q$ joueurs	$B_i^* \quad \forall i \in N = \{1, \dots, n+q\}$
formation du cartel C	Eq. de Nash entre $C_n = \{1, \dots, n\}$ et les firmes $n+1, \dots, n+q$	$B_N(i, C_n) \quad \forall i \in C$ $B_N(i, F_q) \quad \forall i \in F$
la firme j quitte C	Eq. de Nash entre $C' = C_n - \{j\}$ ( $j \in C_n$ ) et les firmes $j, n+1, \dots, n+q$	$B_N(i, C_n - \{j\}) \quad \forall i \in C'$ $B_N(i, F_q \cup \{i\}) \quad \forall i \in F \cup \{j\}$



### **Définition IV.2**

Un membre  $i$  d'un cartel de taille  $n$  trahit l'accord de collusion si:

$$B_N(i, F_q \cup \{i\}) > B_N(i, C_n)$$

### **Définition IV.3**

Une firme  $i$  de la frange rejoint un cartel de taille  $n$  si:

$$B_N(i, F_q) < B_N(i, C_n \cup \{i\})$$

Les deux concepts de stabilité (interieure et extérieure) donnés par Jacquemin et alii [1983] peuvent être définis de manière suivante. Un cartel est stable interieurement si aucun membre n'a avantage "trahir" le cartel (pour rejoindre la frange) et stable exterieurement si aucune firme de la frange n'a avantage à le rejoindre.

Donsimoni et alii [1985] donnent une preuve d'existence de tels cartels pour le cas d'une demande linéaire et montrent qu'il existe toujours des tailles de l'industrie pour lesquelles deux cartels sont stables, dont l'un est le cartel intégral (comprenant toutes les firmes de l'industrie). Ils montrent également que la taille relative d'un cartel stable (rapport de sa taille et de celle de l'industrie), est une fonction décroissante de la taille de l'économie.

Donsimoni [1985] repris le modèle précédent en y introduisant une dissymétrie dans la structure de coût des firmes en place. L'objectif est alors de mesurer l'impact d'une hétérogénéité des fonctions de coûts sur l'existence de cartels stables. Donsimoni montre ainsi l'existence de cartels stables "hétérogènes" sous l'hypothèse de fonctions de demande linéaires et de fonctions de coût marginal linéairement croissantes (ces cartels sont alors composés des firmes les plus efficaces).

Ces concepts de stabilité ont été proposés dans un contexte de produits homogènes. Si l'on se base sur un modèle où n'existe pas de différences de profit à l'intérieur du cartel (en raison de l'homogénéité des produits par exemple, comme c'est le cas dans D'Apremont et alii), et si le profit agrégé augmente avec la taille du cartel, tant que le cartel est instable extérieurement, les membres améliorent leur situation quand une firme extérieure les rejoint. Dans notre modèle, il n'est pas certain que l'entrée d'une nouvelle firme dans le cartel augmente le profit de tous les anciens membres (nous le montrons plus loin). En l'absence de transferts latéraux, ces membres doivent en toute logique opposer un veto à cette entrée. Compte tenu de cette remarque, nous proposons une adaptation de la définition de stabilité externe à notre cas spécifique.

#### **Définition IV.4.a**

Un cartel  $C_n$  est stable intérieurement si aucun de ses membres n'a avantage à rejoindre la frange compétitive, autrement dit, si  $B_N(i, F_q \cup \{i\}) \leq B_N(i, C_n), \forall i \in C_n$ .

#### **Définition IV.4.b**

Le cartel  $C_n$  est stable extérieurement si et seulement si:

$\forall i \in F_q \quad C_n \cup \{i\}$  est instable intérieurement.

Cette définition englobe bien sûr celle donnée par D'Aspremont, Jacquemin Gabszewicz et Weymark dans le cadre d'une industrie de produits homogènes. En effet, dans un tel contexte, en regard de l'égalité des profits entre les firmes du cartel et du nouvel entrant, analyser la stabilité externe est équivalent à apprécier le profit obtenu par l'entrant. Dans notre modèle, il n'est pas certain que cette entrée augmente le profit de tous les anciens membres puisque ses effets sur le profit des firmes du cartel varient selon la position de ces dernières par rapport à la concurrence extérieure. Le veto opposé par une firme à l'entrée d'un nouveau membre dans le cartel doit pouvoir se concrétiser par sa sortie du cartel, c'est à dire par la trahison de l'accord conclu. Il n'est pas certain que la baisse de profit qu'elle enregistre à la suite de l'entrée soit incitatif à la déviation. Nous montrons plus loin que ce cas peut fort bien arriver (section IV.2.2. exemple 1).

Nous allons à présent définir formellement le phénomène de free-riding abordé dans la section IV.1 et nous donnerons par la suite les relations existant entre ce phénomène et celui de la déviation ("trahison") inhérent aux processus de cartellisation.

#### **Définition IV.4.c**

$i \in N$  est un free-rider pour des cartels de taille  $n$  si:

$\forall j \in F_q, B_N(i, C_n) \leq B_N(i, [C_n / \{i\}] \cup \{j\})$ .

Pour terminer cette brève référence conceptuelle, nous donnons des relations possibles liant les deux notions de déviation (ou "trahison") et de free-riding. Pour cela, nous dirons qu'une firme  $i \in N$  vérifie la propriété (P1) si:

$$\forall j \in F_q, B_N(i, C_n \cup \{j\}) < B_N(i, C_n) \quad (P1)$$

Une firme  $i$  vérifiant cette propriété voit donc son profit à l'intérieur d'un cartel baisser systématiquement à l'entrée d'un nouveau membre. Cette propriété qui, comme nous l'avons posé précédemment, ne suffit pas à définir un cartel stable extérieurement, s'avérera utile pour la compréhension des liens qui existent entre les notions de free-riding et de "déviation".

On dira par ailleurs, qu'une firme  $i \in N$  vérifie la propriété (P2) si:

$$B_N(i, F_q) < B_N(i, F_{q+1}) \quad (P2)$$



Cette propriété traduit la situation où la firme  $i$  préfère observer (à partir de la frange), une cartellisation de taille  $n$  que de taille  $n-1$ . Cette propriété est toujours vérifiée dès lors que les entreprises se trouvant en dehors de processus de coopération préfèrent observer des structures de marché de plus en plus concentrées.

Nous pouvons alors facilement démontrer les résultats:

- 1- Si  $i \in N$  vérifie la propriété (P1) alors:  
 $i$  free-rider pour  $C_n \Rightarrow i$  déviant dans  $C_{n+1}$ .
- 2- Si  $i \in N$  vérifie la propriété (P2) alors:  
 $i$  déviant dans  $C_n \Rightarrow i$  free-rider pour  $C_n$

#### **IV.2.1. Stabilité interne**

L'examen des profits obtenus à l'équilibre (relation (III.25)) suggère une possible vulnérabilité du cartel à travers les établissements adjacents à sa périphérie (établissements 2 et  $n-1$ ). Ces derniers supportent d'une façon plus accrue les conséquences du rôle spécifique dévolu aux établissements périphériques 1 et  $n$  qui bradent les prix pour arracher des parts de marchés importantes à la frange. La conséquence pour ces établissements 2 et  $n-1$  est, en terme de profit, l'obtention du niveau le plus bas du cartel. Ils sont donc les premiers incités à trahir l'accord en prix, alors que les établissements périphérique 1 et  $n$  sont au contraire, de par les profits élevés obtenus, les moins incités à la défection.

Ces phénomènes interviennent systématiquement sur un marché différencié où les établissements sont localisées différemment vis à vis des concurrents extérieurs. Certains s'en trouvent de ce fait lésés par rapport à d'autres.

Nous mettons cela en évidence analytiquement en prenant comme exemple le cas dérivé duopolistique, c'est à dire un cartel à  $n$  firmes confronté à une concurrence extérieure représentée uniquement par un seul établissement que nous appellerons  $S$  (substitut). Nous regardons par la suite les modifications à apporter aux résultats obtenus quand la composante de la frange tend à augmenter ( $q > 1$ ).

#### **A. Cas d'une configuration duopolistique: $q=1$ (ou $F_q = \{S\}$ )**

Supposons donc que la frange est composée uniquement d'un seul établissement  $S$  entouré des établissements 1 et  $n$  du cartel.

Le système de prix de meilleure réaction du cartel  $C_n = \{1, \dots, n\}$  au prix  $p_s$  affiché par l'établissement S est déduit de la relation (III.18) et en tenant compte de l'égalité:

$p_{n+q} = p_{n+1} = p_s$ . Il vient alors:

$$p_i = \frac{1}{2} p_s + \frac{n+1}{2N^2} i - \frac{1}{2N^2} i^2 \quad i=1, \dots, n$$

Le prix de meilleure réaction de l'établissement S aux prix affichés par le cartel (plus précisément: aux prix affichés par ses établissements adjacents 1 et n) s'écrit (relation (III.13):

$$p_s = \frac{1}{4} p_1 + \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2N^2}$$

Comme à l'équilibre  $p_1 = p_s$  (nous cherchons une solution symétrique), l'intersection de ces courbes de meilleure réaction donne l'équilibre de Nash. Il s'obtient également directement en appliquant la relation (III.9) cette structure duopolistique du marché.

On a dès lors:

$$(IV.1) \quad \left| \begin{array}{l} p_N(s, F_1) = \frac{N+1}{3N^2} \\ p_N(i, C_n) = \frac{1}{6N^2} (-3i^2 + 3Ni + N+1) \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

De (III.6) et (III.7), nous déduisons les parts de marchés et les profits à l'équilibre:

$$(IV.2) \quad \left| \begin{array}{l} D_N(s, F_1) = \frac{1}{2N} \quad i=2, \dots, n-1 \\ D_N(n, C_n) = D_N(1, C_n) = \frac{N+7}{12N} \end{array} \right.$$

$$(IV.3) \quad \left| \begin{array}{l} B_N(i, C_n) = \frac{1}{12N^3} [-3i^2 + 3Ni + (N+1)] \quad i=2, \dots, n-1 \\ B_N(1, C_n) = B_N(n, C_n) = \frac{1}{36N^3} (2N-1)(N+7) \end{array} \right.$$

L'objectif est de "repérer" parmi les firmes du cartel, les firmes déviantes potentielles suivant leur localisation au sein de celui-ci.

Notons  $t$ , une firme trahissant l'accord du cartel ( $t \in \{1, \dots, n\}$ ).

Distinguons alors dans l'analyse, le cas où  $t$  est la firme 1 (ou  $n$ ) et le cas où  $t \in \{2, \dots, n-1\}$ .

### 1. $t=n$ (ou $t=1$ )

On suppose, pour fixer les idées que la firme  $n$  trahit. Les résultats obtenus resteront valables pour la firme 1.

Après trahison, La firme  $n$  est concurrencée par le substitut  $S$  et par le cartel (par l'intermédiaire de la firme  $n-1$ ). Elle élargit la composante de la frange en en devenant la deuxième firme (avec le substitut  $S$ ).

Aux prix  $p_s$  et  $p_n$  affichés par respectivement  $S$  et  $n$ , le cartel réagit en choisissant un système de prix  $[p_1, \dots, p_{n-1}]$  qui maximise la somme des profits des établissements restants.

Les prix et profits de Nash sont donnés par (application des relations (III.9) et (III.25) pour  $q=2$ ):

$$(IV.4) \quad \left| \begin{array}{l} p_N(1, C_{n-1}) = p_N(n-1, C_{n-1}) = \frac{3N-4}{5N^2} \\ p_N(n, F_1 \cup \{n\}) = p_N(s, F_1 \cup \{n\}) = \frac{N+2}{5N^2} \end{array} \right.$$

Les parts de marchés et les profits de la firme déviante  $t (=n)$  et du substitut  $S$  sont égaux pour raison de symétrie et sont donnés par:

$$(IV.5) \quad \left| \begin{array}{l} D_N(n, F_1 \cup \{n\}) = D_N(s, F_1 \cup \{n\}) = \frac{N+2}{5N} \\ B_N(n, F_1 \cup \{n\}) = B_N(s, F_1 \cup \{n\}) = \frac{1}{N} \left[ \frac{N+2}{5N} \right]^2 \end{array} \right.$$

En comparant les prix, parts de marchés et profits de la forme déviante avant et après "trahison", on obtient:

$$(IV.6) \quad \left| \begin{array}{l} p_N(n, F_1 \cup \{n\}) < p_N(n, C_n) \\ D_N(n, F_1 \cup \{n\}) > D_N(n, C_n) \\ B_N(n, F_1 \cup \{n\}) < B_N(n, C_n) \end{array} \right.$$

En trahissant l'accord, la firme périphérique  $n$  affiche un prix plus faible et augmente sa part de marché sans pour autant augmenter son profit.

Les firmes 1 et n ne sont jamais incitées à se désolidariser du cartel.

## 2. $t \neq n$ (et $t \neq 1$ )

Si  $t = n-1$  (ou  $t = 2$ ), la firme n qui continue à appartenir au cartel, est entourée par deux établissements concurrents (le substitut et le déviant) si bien que le cartel lui assigne un prix de concurrence identique à celui qu'elle pratiquerait si elle trahissait la coalition.

Si  $t \neq n-1$  (et  $t \neq 2$ ), un déviant de ce type sera opposé à deux composantes connexes du cartel, chaque composante possédant au moins deux firmes qui coopèrent pour concurrencer et le déviant et le substitut.

La firme déviante rejoint alors la frange concurrentielle qui n'est plus comme dans le cas précédent, un ensemble connexe d'établissements.

$p_N(t, F_1 \cup \{t\})$ ,  $D_N(t, F_1 \cup \{t\})$ ,  $B_N(t, F_1 \cup \{t\})$  désigneront respectivement le prix, la part de marché et le profit du free-rider t après trahison.

Des relations (III.23), (III.24), (III.25), on déduit les prix, part de marché, et profit à l'équilibre. Les valeurs de ces variables sont indépendantes de la localisation du déviant à l'intérieur du cartel:

$$(IV.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_N(t, F_1 \cup \{t\}) = \frac{N+2}{6N^2} & \forall t \in \{2, \dots, n-1\} \\ D_N(t, F_1 \cup \{t\}) = \frac{N+2}{6N} & \forall t \in \{2, \dots, n-1\} \\ B_N(t, F_1 \cup \{t\}) = \frac{1}{N} \left( \frac{N+2}{6N} \right)^2 & \forall t \in \{2, \dots, n-1\} \end{array} \right.$$

On vérifie que pour tout n, si  $t = n-1$ , le prix affiché par cette firme en déviant de l'accord (relation IV.7) est inférieur au prix  $p_N(n-1, C_n)$  qui lui a été affecté par le cartel et que  $D_N(n-1, F_1 \cup \{n-1\})$  est plus important que  $D_N(n-1, C_n)$ .

Par contre, la différence de profit qu'elle obtient par rapport à la situation de coopération initiale varie suivant la taille du cartel:

$$(IV.8) \quad B_N(n-1, F_1 \cup \{n-1\}) > B_N(n-1, C_n) \Leftrightarrow n > 13$$

( Et pour raison de symétrie:  $B_N(2, F_1 \cup \{2\}) > B_N(2, C_n) \Leftrightarrow n > 13$ )

La trahison de la  $(n-1)^{ième}$  firme est donc avantageuse dès que la taille du cartel est suffisamment importante.

Au sein du cartel, les profits sont croissants de la firme 2 à la firme  $n/2$  (si  $n$  est pair,  $(n+1)/2$  sinon). Si une de ces firmes trahit la coopération, elle obtiendra à l'équilibre un profit indépendant de sa position sur le marché et égale à  $\frac{1}{N} \left( \frac{N+2}{6N} \right)^2$ . Ainsi, la firme 2 (ou  $n$ ) sera la firme la plus incitée à quitter la coalition.

Plus généralement, une firme  $t$  ( $t \in \{2, \dots, n-1\}$ ) est incitée à trahir l'accord coopératif si:

$$(IV.9) \quad \frac{1}{N} \left( \frac{N+2}{6N} \right)^2 > \frac{1}{12 N^3} [-3 t^2 + 3N.t + N+1]$$

Ce qui est équivalent à:

$$(IV.10) \quad \left| \begin{array}{l} t < F(n) \\ \text{avec } F(n) = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{6} (5n^2+6n-3)^{1/2} \end{array} \right.$$

on vérifie:

$$(IV.11) \quad F(n) < n/2$$

Les établissements "centraux" du cartel n'ont donc jamais intérêt à trahir l'accord.

$$(IV.12) \quad F(n) < 2 \Leftrightarrow n \leq 13$$

La firme  $n-1$  (ou 2) n'ont pas avantage à quitter le cartel quand la taille de celui ci est suffisamment restreinte.

Nous résumons l'ensemble de ces résultats dans la proposition :

**Proposition IV.3**

1) Si  $n \leq 13$ , aucune firme du cartel n'a avantage à dévier de l'accord coopératif, c'est à dire:

$$n \leq 13 \Rightarrow B_N(i, F_1 \cup \{i\}) \leq B_N(i, C_n) \quad \forall i \in C_n$$

2) Si  $n > 13$  tout établissement  $t$  tel que  $2 < t < F(n)$ , est susceptible de trahir l'accord:

$$n > 13 \Rightarrow B_N(j, F_1 \cup \{j\}) > B_N(j, C_n), \quad \forall j \in \{i \in C_n, 2 < i < F(n)\}$$

3) Les établissements 1 et  $n$  localisés à la périphérie du cartel ainsi que les établissements centraux n'ont jamais avantage à trahir l'accord. Autrement dit:

$$B_N(i, F_1 \cup \{i\}) \leq B_N(i, C_n) \quad \forall i = 1, n, n/2 \text{ (ou } (n+1)/2 \text{ si } n \text{ impair)}.$$

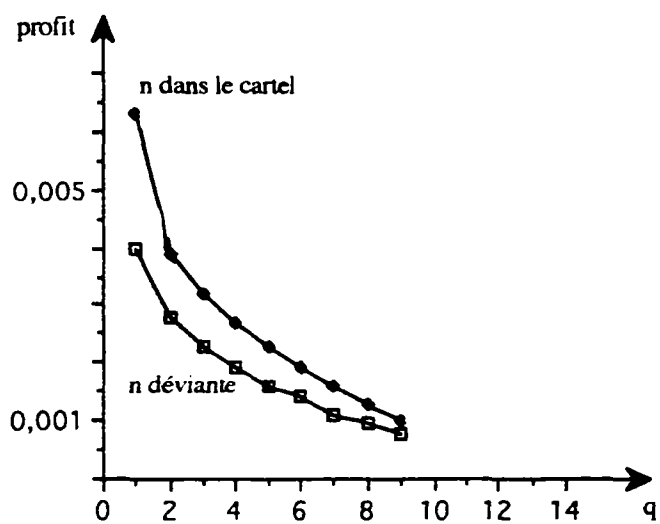


Figure IV.1  
Profit de la firme  $n$  à l'intérieur et à l'extérieur du cartel en fonction du nombre de concurrents extérieurs ( $N=13$ )

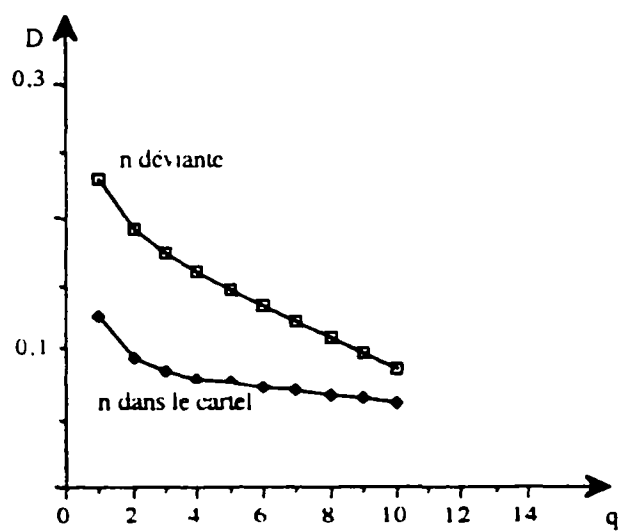


Figure IV.2  
Part de marché de la firme  $n$  à l'intérieur et à l'extérieur du cartel en fonction du nombre de concurrents extérieurs ( $N=13$ )

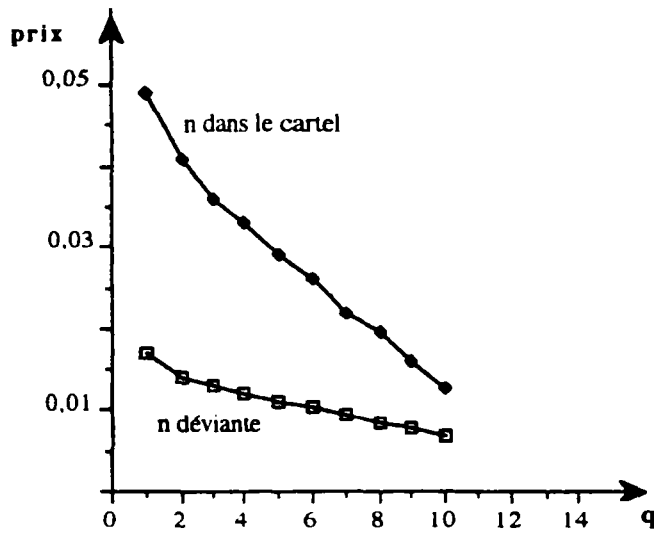


Figure IV.3

Prix affiché par la firme  $n$  avant et après sa sortie du cartel en fonction du nombre de concurrents extérieurs ( $N=13$ )

#### b- Firme $n-1$

Si la firme  $n-1$  quitte le cartel, la firme  $n$  agit de la même façon que si elle était indépendante du cartel. Du point de vue des valeurs d'équilibre, tout se passe comme si  $q+3$  joueurs étaient en présence:  $C_n - \{n-1, n\}, n-1, n+1, \dots, n+q$ .

Ces valeurs se déduisent des relations (III.9), (III.24) et (III.25):

$$\left| \begin{array}{l} p_N(n-1, F_q \cup \{n-1\}) = \frac{1}{N^2} \left[ 1 + \frac{(n-3) \cdot e_{1,q+2}}{2 - e_{1,q+2}} \right] \\ D_N(n-1, F_q \cup \{n-1\}) = \frac{1}{N} + \frac{(n-3) \cdot e_{1,q+2}}{N(2 - e_{1,q+2})} \\ B_N(n-1, F_q \cup \{n-1\}) = \frac{1}{N^3} \left[ 1 + \frac{(n-3) \cdot e_{1,q+2}}{2 - e_{1,q+2}} \right]^2 \end{array} \right.$$

Pour voir si la firme  $n-1$  tire avantage en trahissant l'accord, il suffit de comparer  $B_N(n-1, F_q \cup \{n-1\})$  et  $B_N(n-1, C_n)$ .

La firme  $(n-1)$  (ou 2) plus prompte à trahir le cartel quand  $q=1$  voit son profit de "trahison" diminuer à mesure que  $q$  augmente,  $N$  étant fixé (figure IV.4 pour  $N=13$ ). Comme on l'a montré (proposition IV.1), cette firme, adjacente à la périphérie du cartel, ne trahit jamais l'accord si  $q=1$  et  $n \leq 13$ . Elle n'a à fortiori pas avantage à le faire si  $q$  est strictement supérieur

### Corollaire

Il existe une suite de nombres  $n_1, \dots, n_k$  avec  $n_1 > n_2 > \dots > n_k > 13$  et  $k = (n-2)/2$  si  $n$  pair ( $k = (n-1)/2$  sinon) vérifiant:

$$n = n_p \quad \Leftrightarrow \quad B_N(i, F_1 \cup \{i\}) > B_N(i, C_n) \quad \forall i \in \mathbb{N} : 3 \leq i \leq p+2$$

Le corollaire dit qu'à partir de  $N=14$  (taille pour laquelle  $\{2\}$  est tenté de quitter le cartel), et quand  $N$  croît, les firmes une après une (en allant de la firme 3 au centre du cartel) vont elles aussi être tentées par la trahison. Tant que la taille du cartel permet encore l'existence d'une part de marché suffisamment importante pour que, associée à une surélévation des prix elle rend possible des profits encore satisfaisants, les firmes ne trahissent pas.

Les établissements à s'accommoder d'une taille importante du cartel sont les établissements "centraux" qui, protégés de la concurrence extérieure, obtiennent des profits conséquents.

### B. Cas général ( $q > 1$ )

Ces résultats qui offrent une bonne illustration des mécanismes à la base de ce type de problèmes doivent néanmoins être relativisés. En effet, il sied de rappeler qu'ils découlent du cas où la frange extérieure n'est composée que d'un seul établissement. Qu'en est-il alors du cas général ( $q > 1$ )?

L'expression des prix, part de marché et profits à l'équilibre débouchant sur des calculs de traitement peu réalisables, nous allons raisonner sur des exemples numériques en essayant d'y dégager les principales tendances qui offrent une appréciation des facteurs qui concourent à la stabilité du cartel.

Nous nous basons sur deux exemples: l'un correspondant à la valeur 13 de  $N$  et l'autre à la valeur 15. Nous allons nous intéresser aux cas des firmes  $n$  et  $n-1$  qui ont, comme on l'a vu, des positions cruciales au sein du cartel.

### Analyse numérique

#### a- Firme $n$

Supposons que la firme  $n$  dévie de la stratégie coopérative adoptée par le cartel. Elle rejoint la frange concurrentielle et les valeurs d'équilibre des  $q+2$  joueurs ( $C_n - \{n\}$ ,  $n, n+1, \dots, n+q$ ) s'obtiennent à partir des relations (III.9), (III.24) et (III.25): il suffit de remplacer  $n$  par  $n-1$ ,  $q$  par  $q+1$ . D'où:

$$p_n(n, F_q \cup \{n\}) = \frac{1}{N^2} \left[ 1 + \frac{(n-2) \cdot e_{1,q+1}}{2 \cdot e_{1,q+1}} \right]$$



$$D_N(n, F_q \cup \{n\}) = \frac{1}{N} + \frac{(n-2) \cdot e_{1,q+1}}{N(2-e_{1,q+1})}$$

$$B_N(n, F_q \cup \{n\}) = \frac{1}{N^3} \left[ 1 + \frac{(n-2) \cdot e_{1,q+1}}{2-e_{1,q+1}} \right]^2$$

Pour savoir si  $n$  tire avantage de sa déviation, il faut comparer  $B_N(n, F_q \cup \{n\})$  à  $B_N(n, C_n)$ .

A  $q$  et  $N$  fixés, la firme périphérique  $n$  dévie de la stratégie coopérative en baissant le prix (voir figure IV.3 pour  $N=13$ ). Elle s'accapare alors d'une part de marché plus importante (figure IV.2). Cela ne suffit cependant pas à compenser la baisse du prix de vente de son produit (figure IV.1).

Quand  $q$  augmente ( $N$  fixé à 13), la concurrence à l'extérieur du cartel est plus intense. Les profits générés par la trahison décroissent. Ceux observés à la périphérie du cartel diminuent également, mais restent toujours supérieurs aux profits de trahison.

Par conséquent, si la trahison est impossible dans le cas  $q=1$ , elle le restera d'autant plus si le nombre de firmes de la frange est supérieur à l'unité: Les établissements périphériques n'auront jamais avantage à quitter le cartel.

Des figures IV.1, 2, 3, on note que la perte de profit, la chute de prix, et le gain en demande dus au comportement déviant de la firme  $n$  diminuent à mesure que le nombre de concurrents extérieurs croît: La trahison coûte de moins en moins à mesure que la taille du cartel diminue. Elle est globalement moins ruineuse quand les concurrents extérieurs sont nombreux. Autrement dit, la firme périphérique est d'autant plus fidèle au cartel que la taille de celui-ci est restreinte (à  $N$  fixé).

Ce phénomène est dû au fait que plus la taille du cartel est restreinte, et donc le niveau général des prix est bas (en raison d'une concurrence extérieure plus sévère), plus la marge de manoeuvre du free-rider en matière tarifaire est réduite. Une trahison se résume alors à une légère déviation par rapport au prix coopératif, entraînant un faible gain en demande, la combinaison de ces deux éléments débouchant sur une différence de profit moins élevée.

à 1 (figure IV.4) puisqu'à mesure que  $q$  croît, elle perd (en trahissant), des parts de marché de plus en plus importantes et doit vendre à un prix encore plus bas (figures IV.5 et IV.6 ).

Les localisations adjacentes à la périphérie du cartel, ne sont pas directement touchées dans leurs parts de marchés quand  $N$  est fixé et  $q$  croît (relation III.6). Quand le nombre  $q$  d'établissements extérieurs augmente, la clientèle  $y$  est fidélisée au moyen d'une baisse de prix qui s'opère à un rythme très rapide, reflet de la concurrence de plus en plus sévère que se livre la périphérie et la frange. Pour  $N=13$ , et quand  $q$  augmente, cette stabilité de la demande de la firme  $n-1$ , additionnée à un prix toujours supérieur à celui qu'elle afficherait à l'extérieur du cartel (malgré sa baisse continue), se combinent pour rendre la trahison impossible.

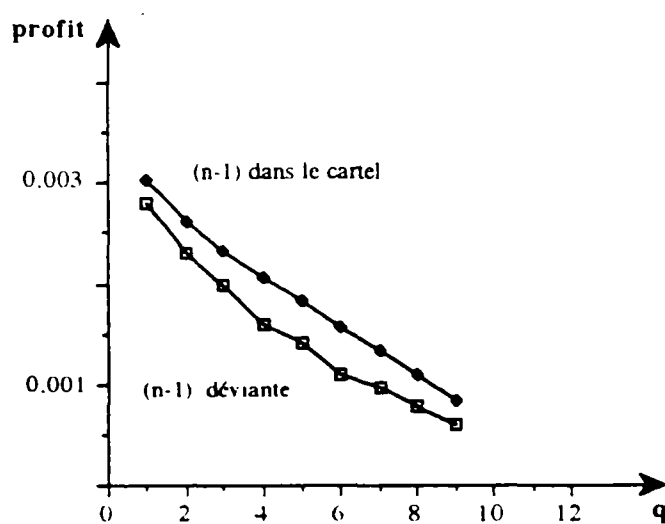


Figure IV.4

Profit de la firme  $(n-1)$  à l'intérieur et à l'extérieur du cartel en fonction du nombre de concurrents extérieurs ( $N=13$ )

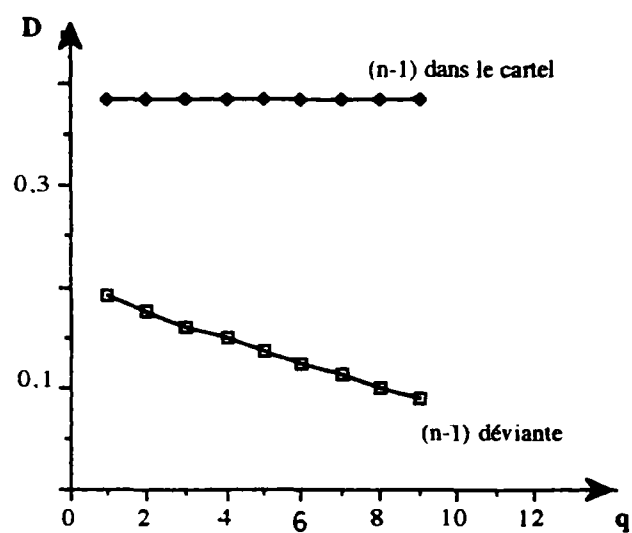


Figure IV.5

Part de marché de la firme (n-1) à l'intérieur et à l'extérieur du cartel en fonction du nombre de concurrents extérieurs (N=13)

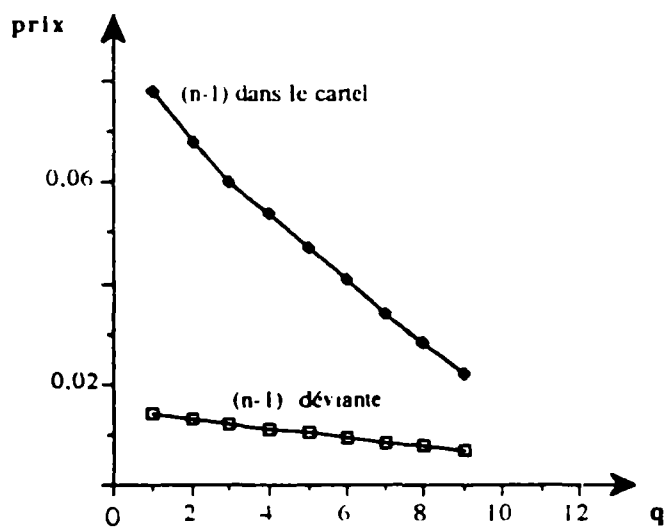


Figure IV.6

Prix affiché par la firme n-1 avant et après sa sortie du cartel en fonction du nombre de concurrents extérieurs (N=13)

L'incitation à la trahison commence pour la firme (n-1) à partir de  $n=13$  ( $q=1$ ), c'est à dire si la taille de l'industrie est supérieure ou égale à 14. La figure IV.7 illustre ce phénomène pour  $N=15$ . Bien que le surplus de profit apporté par la trahison est minime, il est tout de même positif pour  $q=1$ .

Ce changement de situation observé entre  $N=13$  et  $N=15$  est parfaitement expliqué par comparaison des niveaux de prix puis de demande associés (fig.IV.5 et IV.8 puis IV.6 et IV.9). En effet, quand la firme (n-1) trahit l'accord dans l'industrie de taille 15, elle doit baisser les prix à un niveau tel qu'elle s'accapare une part de marché supérieure à celle qui lui était acquise dans le cartel. La baisse de prix dans l'industrie de taille 13 est insuffisante pour entraîner une telle tendance. De plus, quand  $N=15$  et  $q=1$  la chute de prix est suffisamment compensée par le surplus de demande. Ce n'est plus le cas quand  $q>1$ .

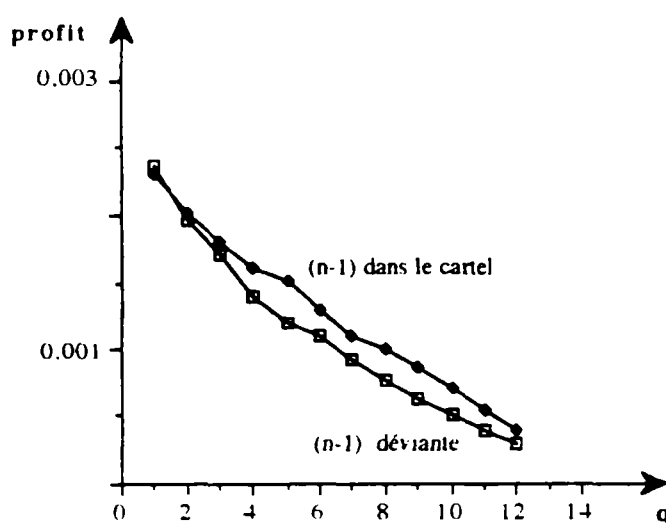


Figure IV.7  
Profit de la firme n-1 à l'intérieur et à l'extérieur du cartel pour  $N=15$ .

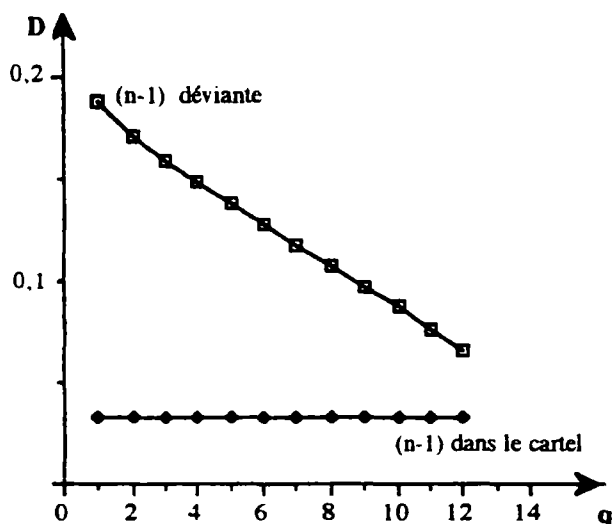


Figure IV.8

Part de marché de la firme n-1 à l'intérieur et à l'extérieur du cartel pour  $N=15$ .

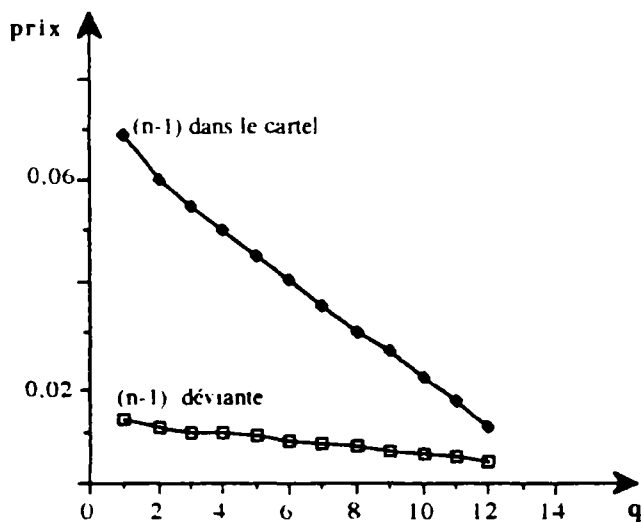
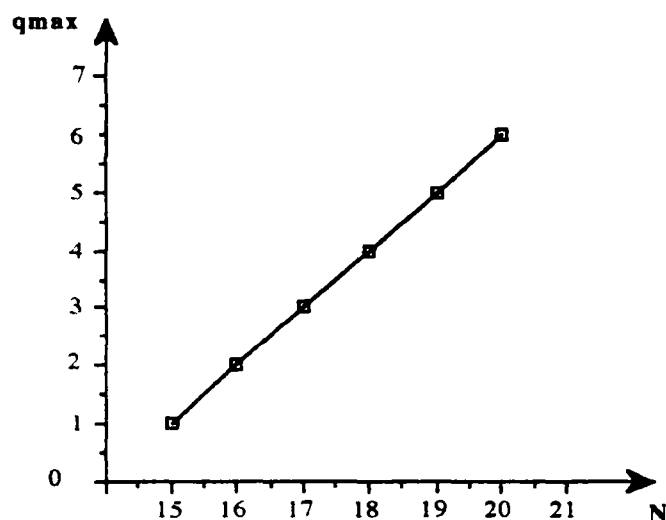


Figure IV.9

Prix affiché par la firme n-1 à l'intérieur et à l'extérieur du cartel pour  $N=15$ .

Pour que la trahison de la firme n-1 reste avantageuse même quand le nombre de concurrents de la frange est supérieur à un, il faut (figure IV.10) augmenter la taille de l'industrie<sup>9</sup>. On peut comprendre ce résultat autrement: à partir de  $N=15$ , le passage d'une taille de l'industrie à une autre immédiatement supérieure, maintient systématiquement l'incitation à trahir de la firme n-1, que l'établissement supplémentaire rejoigne la frange (augmentant ainsi sa taille d'une unité) ou le cartel.

<sup>9</sup> La figure (II.10) représente la taille maximale de la frange pour laquelle la trahison de (n-1) est possible, en fonction de la taille de l'industrie



**Figure IV.10**  
Taille maximale de la frange (en fonction de la taille de l'industrie), rendant possible une défection de la firme n-1 .

#### IV.2.2. Stabilité externe

Nous allons mettre en évidence à travers deux exemples numériques, l'existence de cartels stables extérieurement et plus globalement, de cartels stables, c'est à dire vérifiant à la fois la stabilité interne et externe. Pour cela, on analyse uniquement le cas non triviale, c'est à dire quand le nouveau candidat à la cartellisation provient de la périphérie de la frange. Autrement dit, on suppose que c'est toujours l'établissement n+1 qui rejoint le cartel (1,...,n). On montrera à travers le premier exemple comment l'entrée d'un nouveau membre dans le cartel peut s'accompagner d'une baisse de profit d'une firme sans que cette baisse soit suffisante pour inciter cette dernière à quitter le cartel (le nouveau cartel vérifiant la stabilité interne).

**Exemple 1:** N=10 (voir tableau de valeurs en annexe)

$$B_N(i, C_2) < B_N(i, C_3) \quad i=1,2$$

$$B_N(i, C_3) < B_N(i, C_4) \quad i=1,2,3$$

$$B_N(p, C_p) > B_N(p, C_{p+1}) \quad \forall p=4, \dots, 10$$

Tous les cartels de taille inférieure à 4 sont instables extérieurement: l'entrée d'un nouveau membre accroît le profit de tous les membres (y compris le nouveau puisque, ce dernier, localisé à la périphérie du cartel, n'a pas avantage à quitter le cartel qu'il rejoint, c'est à dire, en d'autres termes, n'a pas avantage à rester dans la frange).

A partir de n=4, on observe que la périphérie du cartel subit une baisse de profit suite à l'entrée d'une nouvelle firme. Cela est dû au fait qu'une firme périphérique, devient, après entrée d'un nouveau membre, adjacente à la périphérie donc devient la firme la plus défavorisée du cartel. Comme la taille de l'industrie est inférieure à 14, aucune firme n'aura intérêt à trahir l'accord.

Par conséquent, cette baisse de profit n'est pas suffisante pour entraîner la sortie des firmes périphériques du cartel. Le cartel (1,2,3,4) est le cartel minimal stable (c'est à dire, le cartel de taille minimal à la fois stable intérieurement et extérieurement).

Par ailleurs, le cartel (1,2,3,4,5) vérifie également, à la fois la stabilité interne et externe. Il se pose alors le problème de détermination du cartel stable de taille maximale. Comme ici  $N < 14$ , les cartels ne perdent pas leur stabilité interne quand  $n$  augmente, et donc le cartel maximal à la fois stable intérieurement et extérieurement, est le cartel de taille 10 (monopole).

### **Exemple 2: $N=20$**

Le cartel de taille minimale stable extérieurement est le cartel (1,2,3,4,5).

Par ailleurs, on vérifie qu'aucune firme n'a avantage à trahir tant que le nombre de firmes appartenant à la frange est supérieur ou égale à 6: le cartel (1,...,5) est stable intérieurement. Par conséquent, (1,2,3,4,5) est le cartel stable minimal.

A la différence de l'exemple précédent, le cartel stable de taille maximale n'est pas le cartel intégral, mais le cartel partiel de taille  $n=14$ . D'où la structure finale du marché: le cartel (1,...,14) et une frange extérieure composée de  $q=6$  établissements indépendants.

## **IV.3. Libre entrée et stabilité**

Un deuxième facteur d'instabilité d'un processus de cartellisation, est la libre entrée sur le marché. Une nouvelle entrée a pour conséquence une chute des profits de tous les établissements<sup>10</sup>, ce qui aura pour effet de limiter considérablement le pouvoir du cartel et aussi, éventuellement, d'inciter certains membres à dévier de la stratégie coopérative mise en place. L'hypothèse de travail, contraignante, qui sera utilisée dans toute la suite sera celle d'une relocalisation symétrique de toutes les firmes de l'industrie.

Quand une nouvelle firme  $E$  s'installe sur le marché, à la différence de l'analyse menée dans les sections précédentes, la taille  $N$  de l'industrie varie pour passer à  $N+1$ . Deux situations sont alors envisageables: ou bien l'entrant rejoint le cartel et alors un équilibre de Nash s'établit entre (toujours)  $q+1$  joueurs: le cartel  $C' = C_n \cup \{E\}$ , et les  $q$  établissements  $n+1, \dots, n+q$  appartenant à la frange  $F_q$  ou bien l'entrant rejoint la frange et alors un équilibre de Nash

---

<sup>10</sup> Cette conséquence (partagée par tous les établissements) donne à l'entrée les caractéristiques d'un bien public et sa dissuasion suppose une "contribution" de l'ensemble des firmes déjà installées. Gilbert et Vives [1986] ont mesurés (sur un marché à produits homogènes), les possibilités d'une dissuasion sur la base d'un jeu non coopératif.

s'établit entre  $q+2$  joueurs: le cartel  $C_n$ , les firmes  $n+1, \dots, n+q$  et  $E$ , appartenant à la frange  $F = F_q \cup \{E\}$ .

Rappelons que  $C_f$  désigne le coût fixe d'installation. On peut énoncer la condition d'entrée de  $E$  sur le marché de la manière suivante:

#### Définition IV.3.1

On dit qu'il y'a possibilité d'entrée d'une nouvelle firme  $E$  sur le marché si:

$$(E1) \quad B_{N+1}(E, C_n \cup \{E\}) \geq C_f \quad \text{ou} \quad B_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) \geq C_f \quad (E2)$$

#### IV.3.1. L'entrant rejoint la frange (Cas $q=1$ )

Nous nous plaçons dans le cas où l'entrant est un établissement indépendant qui rejoint la frange concurrentielle.

Dans notre contexte de différenciation horizontale où le cartel, composante connexe, se trouve confronté à une autre composante connexe (la frange), il est d'abord intéressant d'analyser les zones d'entrée les plus vulnérables du cartel, c'est à dire les localisations qui procurent à un nouvel entrant le profit le plus élevé. Pour tenter de répondre à cette question, nous utilisons le modèle simple où la frange est composée d'un seul établissement  $S$ . Le cartel est donc composé de  $n=N-1$  firmes en concurrence avec l'établissement  $S$ . Si  $E$  arrive sur le marché et se localise entre les établissements  $i$  et  $i+1$  ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ) affichant les prix respectifs  $p_i$  et  $p_{i+1}$ , son prix de meilleure réaction  $p_e$  aux prix  $p_i$  et  $p_{i+1}$  est déterminé d'une façon strictement identiques à celle de la section IV.2 moyennant un changement de la taille  $N$  en  $N+1$ .

$$(IV.13) \quad p_e = \frac{1}{4}(p_i + p_{i+1}) + \frac{1}{2(N+1)^2}$$

Le profit qu'il obtient est alors fonction de  $p_i$  et  $p_{i+1}$  si bien que les deux établissements  $i$  et  $i+1$  peuvent, par un choix adéquat de leurs prix respectifs, minimiser le profit espéré de cet entrant  $E$ . Si le cartel par ce choix, peut faire en sorte que ce profit devienne inférieur au coût fixe d'installation sur le marché, l'entrée est dissuadée.

Par conséquent, dans ce cas où l'entrant adopte une localisation au sein même de la zone "contrôlée" par la coalition  $(1, \dots, n)$  en choisissant de la "briser" entre  $i$  et  $i+1$  ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ), créant ainsi une discontinuité dans la chaîne des établissements du cartel, la menace (voir schelling [1970]) consiste à dire: "Si vous vous localisez sur le marché entre les firmes  $i$  et  $i+1$ , nous affichons des prix  $p_i^j$  et  $p_{i+1}^j$  qui vous assure un profit inférieur au coût fixe d'installation".



Dans le cas où l'entrant choisit une localisation plus "pacifique" entre le concurrent S et l'établissement  $i=n$  (ou  $i=1$ )<sup>11</sup>, le cartel peut menacer l'entrant uniquement par l'intermédiaire de son prix  $p_n$  et en anticipant la meilleure réaction de S.

Pour des commodités de calculs, nous posons l'hypothèse d'une relocalisation symétrique de toutes les firmes après l'entrée.

Cette hypothèse contraignante et difficilement envisageable dans la réalité, joue en fait en faveur de l'entrée. Le niveau des profits obtenus par l'entrant sous cette hypothèse est en général bien au dessus de ce qu'il peut escompter en l'absence de cette relocalisation.

**a- E installé entre j et j+1 ( $j \in \{1, \dots, n-1\}$ )**

L'entrant choisit de concurrencer le cartel en choisissant une variété intermédiaire entre deux variétés produites par celui-ci. Les prix, parts de marché et profits sont donnés par respectivement les relations (III.27), (III.30) et (III.31) en tenant uniquement compte de l'augmentation de la taille de l'industrie. Par conséquent, quand l'entrant s'installe entre les établissements j et j+1 ( $j = 1, \dots, n-1$ ), les prix, part de marché et profit qui lui sont associés à l'équilibre sont donnés par:

$$(IV.15) \quad \left| \begin{array}{l} p_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) = \frac{N+2}{6N^2} \\ D_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) = \frac{N+2}{6N} \\ B_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) = \frac{1}{N} \left( \frac{N+2}{6N} \right)^2 \end{array} \right.$$

Les différentes valeurs d'équilibre associées à l'entrant ne dépendent donc pas de la localisation précise choisie par celui ci à l'intérieur de la coalition  $(1, \dots, n)$ . L'entrant réagira de la même façon, qu'il choisisse une localisation où les établissements du cartel effectuent de faibles profits ou au contraire une localisation aux points stratégiques de profits élevés.

Définissons l'ensemble suivant:

$$G_{(j,j+1)}^n = \{(p_1, \dots, p_n, p_s) \in [0, +\infty[^{n+1} / \forall p_e \in [0, +\infty[: B_e(p_1, \dots, p_e, \dots, p_n, p_s) < C_f\}$$

Cet ensemble contient, s'il est non vide, tous les vecteurs prix que peuvent afficher les établissements installés pour empêcher l'entrée de E. On peut alors énoncer le résultat:

---

<sup>11</sup>Signalons que l'analyse est à distinguer par exemple de celle de Bonnano [1987] où le choix des localisations devient une variable stratégique de dissuasion de l'entrée utilisée par la firme multi-produits en place. Bonnano montre entre autres que des localisations judicieusement choisies peuvent s'avérer aussi efficace pour barrer l'entrée qu'une prolifération des produits. On peut se référer aussi dans ce contexte à Selten [1975], Shmalensee [1978].

**Proposition IV.5**

$$(p_{N+1}(1, C_n), \dots, p_{N+1}(n, C_n), p_{N+1}(s, F_q \cup \{E\})) \in G_{(j,j+1)}^n \Leftrightarrow n=2 \text{ ou } n=3$$

**Preuve**

Elle est immédiate, il suffit de poser les inégalités:

$$\frac{1}{(n+2)^3} \leq \frac{1}{n+2} \left( \frac{n+4}{6(n+2)} \right)^2 \leq \frac{1}{(n+1)^3} \Leftrightarrow (n=2 \text{ ou } n=3)$$

Ainsi, si  $\frac{49}{4500} \leq C_f \leq \frac{1}{27}$  nous avons  $p_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) < C_f$

**b- E installé entre S et 1 (ou entre n et S)**

Dans ce cas, l'entrant choisit une localisation adjacente à S.

Le prix affiché, la part de marché, et le profit qu'il obtient à l'équilibre sont donnés par les relations (III.9), (III.24), et (III.25):

$$(IV.17) \quad \left| \begin{array}{l} p_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) = \frac{N+3}{5(N+1)^2} \\ D_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) = \frac{N+3}{5(N+1)} \\ B_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) = \frac{1}{N+1} \left( \frac{N+3}{5(N+1)} \right)^2 \end{array} \right.$$

On vérifie que l'entrée est toujours possible tant que le cartel est composé de plus de deux firmes:

$$\text{Si } n > 2 \quad \frac{1}{n+2} \left( \frac{n+4}{5(n+2)} \right)^2 > \frac{1}{(n+1)^3} \text{ et alors } B_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) > C_f$$

$$\text{Si } n=2 \quad B_{N+1}(E, F_q \cup \{E\}) = \frac{9}{400} = .0225$$

Si  $\frac{9}{400} \leq C_f \leq \frac{1}{27}$ , la grande firme ne peut disposer sur le marché que de deux établissements à profits positifs. Cette firme peut en outre se préserver de l'entrée d'un nouveau concurrent dans l'industrie.

Pour terminer, on vérifie aisément que l'entrée est plus avantageuse dans le cas (1.b) que dans le cas (1.a).

### **Barrière à l'entrée**

En général (si  $n > 2$ ), l'analyse montre donc que l'entrée a toujours lieu si le cartel n'instaure pas une politique spécifiquement orientée pour barrer l'entrée à de nouveaux établissements (prix limite). Nous sommes alors amenés à analyser les choix en matière de prix dont dispose le cartel pour dissuader un concurrent potentiel de s'installer sur le marché.

Si  $9/400 \leq C_f < 1/27$ , On a vu que le cartel est alors un duopole, dont la stratégie de Nash suffit à éviter l'installation d'une nouvelle firme sur le marché. Cette stratégie est d'autant moins contraignante pour le cartel qu'il s'agit d'une meilleure réponse à la stratégie du substitut.

En revanche, si  $C_f < 9/400$  ( $n > 2$ ), la stratégie de meilleure réponse ne dissuade pas l'entrée et le cartel doit avoir recours à une politique tarifaire dont l'exécution est accompagnée d'un "manque à gagner" plus ou moins conséquent.

Ainsi que nous l'avons montré, l'entrée la plus avantageuse s'effectue entre le substitut S et la périphérie du cartel. Nous supposons donc qu'un nouvel arrivant sur le marché choisit cette localisation adjacente au substitut.

Notons  $G(C_f)$ , l'ensemble des vecteurs prix qui barrent l'entrée:

$$G(C_f) = \{(p_1, \dots, p_n) \in [0, +\infty]^n / \forall p_e \in [0, +\infty]: \sup[B_e(p_n, p_e, \bar{p}_s); B_e(\bar{p}_s, p_e, p_1)] < C_f\}$$

où  $\bar{p}_s$  désigne la meilleure réaction aux prix  $p_e$  et  $p_n$  (resp  $p_1$ ) quand l'entrée se fait entre l'établissement S et l'établissement n (resp 1).

### **Proposition IV.6**

Quel que soit le coût fixe d'installation  $C_f$ ,  $G(C_f) \neq \emptyset$

### **Preuve**

Quand E entre sur le marché entre i et i+1 ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ) et que s'établissent les prix  $p_i$ ,  $p_{i+1}$  et  $p_e$ , la demande qui lui est adressée est décrite par (relation (III.30)):

$$D_e(p_i, p_e, p_{i+1}) = - (N+1)p_e + \frac{(N+1)}{2}(p_i + p_{i+1}) + \frac{1}{N+1}$$

Si E choisit son prix  $p_e$  suivant sa meilleure réaction aux prix affichés par ses concurrents directs, on obtient le profit optimal:

$$(IV.18) \quad B_e(p_i, p_e, p_{i+1}) = (N+1) \left\{ \frac{1}{4} (p_i + p_{i+1}) + \frac{1}{2(N+1)^2} \right\}^2$$

Ce profit est inférieur au coût fixe d'installation sur le marché si et seulement si:

$$(IV.19) \quad \left| \begin{array}{l} p_i + p_{i+1} < B(C_f) \\ \text{avec } B(C_f) = 4 \left( \frac{C_f}{(N+1)} \right)^{1/2} - \frac{2}{(N+1)^2} \quad (B(C_f) > 0) \end{array} \right.$$

Si l'entrant choisit la localisation la plus avantageuse, c'est à dire si  $i+1=S$  ( $i=n$ ), et sachant que la meilleure réaction du substitut aux prix affichés par E et n s'écrit:

$$(IV.20) \quad \bar{p}_S = (p_e + p_n) + \frac{1}{2(N+1)^2}$$

La propriété (IV.19) est vérifiée dès que:

$$(IV.21) \quad p_1 < B(C_f) - \frac{1}{4}(p_e + p_n) - \frac{1}{2(N+1)^2}$$

On recherche alors une menace qui vérifie  $p_1 = p_n$ , en tenant compte de la meilleure réaction de l'entrant. La contrainte (IV.21) s'écrit alors:

$$(IV.22) \quad \left| \begin{array}{l} p_1 < M(C_f) \\ \text{avec } M(C_f) = \frac{12}{5} \left( \frac{C_f}{N+1} \right)^{1/2} - \frac{8}{N(N+1)^2} \end{array} \right.$$

Si N est défini par la relation (v) (viabilité des établissements en concurrence ; chapitre I) on vérifie  $M(C_f) > 0$ .

Le programme du cartel devient:

$$(IV.23) \quad \text{Max}_{(p_i)_{i \in G(C)}} \sum_{i=1}^n p_i D_i(p_1, \dots, p_n)$$

qui par (IV.22) se simplifie en:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Max}_{(p_i)_{i \in \mathbb{R}^+}} \sum_{i=1}^n p_i D_i(p_1, \dots, p_n) \end{array} \right.$$

$$(IV.24) \quad \left| \begin{array}{l} p_1 = p_n < M(C_f) \end{array} \right.$$

Le système de prix limite  $(p_1^1, \dots, p_n^1)$  solution de (IV.24) vérifie donc:

$$(IV.25) \quad \left| \begin{array}{l} p_1^1 = p_n^1 = M(C_f) \\ p_i^1 = \frac{1}{2}(p_{i-1}^1 + p_{i+1}^1) + \frac{1}{2(N+1)^2} \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

D'où la solution:

$$(IV.26) \quad p_i^1 = M(C_f) - \frac{N}{2(N+1)^2} + \frac{1}{2(N+1)^2} i - \frac{1}{2(N+1)^2} i^2 \quad i=1, \dots, n$$

(IV.26) sont les prix affichés par le cartel s'il veut barrer l'entrée.

Pour que ce système de prix  $(p_1^1, \dots, p_n^1)$  constitue une politique crédible, il ne doit en aucune façon remettre en cause la cohésion du cartel, c'est à dire porter atteinte à la stabilité de celui ci par rapport à la trahison. Nous montrons à travers l'exemple ci dessous l'existence d'un tel risque et donc les limites d'une telle politique (IV.26) dans la constitution de barrières à l'entrée efficaces :

**Exemple:**  $1/5^3 < C_f < 1/4^3$  ( $N=4$ ).

Dans ce cas, on est en présence de trois firmes sur le marché (en sus du substitut). Quand la firme E s'établit sur le marché entre le substitut et la firme 1, l'application de la politique (IV.26) conduit aux prix:

$$(IV.27) \quad \left| \begin{array}{l} p_1^1 = p_3^1 = M(C_f) \\ p_2^1 = M(C) + \frac{1}{25} \\ p_e^1 = p_s^1 = \frac{1}{3} \left[ M(C_f) + \frac{2}{25} \right] = [C_f/5]^{1/2} \end{array} \right.$$

Pour toute firme,  $D_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = -5 p_i + \frac{5}{2}(p_{i-1} + p_{i+1}) + \frac{1}{5}$

Les profits s'écrivent alors:

$$(IV.28) \quad \left| \begin{array}{l} B_2^1 = 0 \\ B_e^1 = p_s^1 = C_f \end{array} \right.$$

$$\left| B_1^1 = \frac{19}{10} [C_f/5]^{1/2} - \frac{78}{25} \right.$$

Il est clair que la firme 2 a alors avantage à trahir le cartel auquel elle appartient. Dans un tel cas de figure on reviendrait à la structure de concurrence initiale du marché et la firme E obtiendrait un profit inférieur au coût fixe (marché "saturé"). L'entrant ne pourra donc pas bénéficier de la trahison de la firme 2.

Tel n'est pas le cas s'il s'agit de la trahison de la firme 1 ou de la firme 3 :

#### Trahison de la firme 1:

Écrivons les prix d'équilibre quand la firme 1 trahit l'accord, l'entrant E étant installé sur le marché (concurrençant le cartel):

$$(IV.29) \quad \left| \begin{array}{l} p_s(1, F_1 \cup \{E\} \cup \{1\}) = p_s(s, F_1 \cup \{E\} \cup \{1\}) = \frac{7}{6.25} \\ p_s(E, F_1 \cup \{E\} \cup \{1\}) = \frac{13}{12.25} \\ p_s(2, C_3 - \{1\}) = p_s(3, C_3 - \{1\}) = \frac{19}{12.25} \end{array} \right.$$

Les profits s'écrivent:

$$(IV.30) \quad \left| \begin{array}{l} B_s(1, F_1 \cup \{E\} \cup \{1\}) = \frac{1}{5} \left( \frac{7}{30} \right)^2 \\ B_s(E, F_1 \cup \{E\} \cup \{1\}) = \frac{1}{5} \left( \frac{13}{60} \right)^2 \end{array} \right.$$

$$\text{On a : } \frac{1}{53} < p_s(E, F_1 \cup \{E\} \cup \{1\}) < \frac{1}{43}$$

Si  $\frac{1}{53} < C_f < \frac{1}{5} \left( \frac{13}{60} \right)^2$ , l'entrée est possible.

$$\text{Dans ce cas } B_s(1, F_1 \cup \{E\} \cup \{1\}) > \frac{19}{10} [C_f/5]^{1/2} - \frac{78}{25}$$

Le cartel n'est donc pas en mesure d'adopter à la fois une politique de prix limite et de maintenir dans tous les cas (pour tout  $C_f$ ) sa stabilité vis à vis de la menace de défection. La libre entrée apparaît donc comme un facteur de déstabilisation de la coopération à la fois non négligeable et relativement robuste.

### **IV.3.1. L'entrant rejoint le cartel**

Jusqu'à présent, on s'est penché sur les problèmes de l'entrée comme facteur d'augmentation de la composante de la concurrence extérieure et donc sur les capacités du cartel à écarter une telle menace. Il peut être aussi intéressant de poser le problème en termes d'augmentation de la taille du cartel. Autrement dit, on suppose que l'entrant rejoint le cartel dès son installation sur le marché. On regardera dès lors l'impact de cet accroissement de la taille à la fois sur les profits des membres du cartel que sur les profits des firmes appartenant à la frange. On évalue par la suite, les changements éventuellement survenus dans l'incitation des firmes à trahir le cartel.

Il est à noter que ce problème peut bien sûr s'interpréter, la question de trahison mise à part, comme un problème de diversification des produits (création d'une nouvelle variété) par une grande firme (coalition  $(1, \dots, n)$ ).

Un premier cas trivial est celui où E choisit une localisation qui n'est adjacente à aucune des firmes du cartel. E réagira aux prix en vigueur de la même manière qu'un établissement de la frange. Autrement dit, son appartenance au cartel ne sera pas reflétée par le prix qu'il se verra affecté. Nous nous trouvons alors exactement dans le cas d'une entrée telle qu'étudiée dans la section précédente.

Le cas qui doit nous intéresser donc est celui où l'établissement E est adjacent à un des établissements du cartel. Précisément, nous supposons que l'entrée se fait toujours à la périphérie de celui ci, entre l'établissement  $n$  et  $n+1$ . Nous supposons comme précédemment une relocalisation symétrique de toutes les firmes après entrée. L'entrant E devient alors la  $(n+1)^{\text{ième}}$  firme du cartel.

Nous allons regarder les conséquences de cette opération sur successivement, la firme périphérique de la frange, la firme adjacente à la périphérie du cartel et enfin sur la périphérie de celui ci.

Les relations donnant l'équilibre sont difficiles à exploiter dans le cas général. Nous nous appuyons alors sur une analyse numérique pour relever les tendances principales qui sont autant d'éléments de réponses aux questions posées.

### **Analyse numérique**

#### **a- Périphérie de la frange**

Considérons l'ensemble:

$$m_p = \{ (n, q) \in \mathbb{N}^2 / B_{n+1}(n+1, F_q) \geq B_n(n+1, F_q) \}$$

$m_p$  est l'ensemble des tailles du cartel et de la frange pour lesquelles la périphérie de cette dernière s'accommode d'une augmentation de la taille du cartel.

On montre l'existence d'un rang  $q_0$  (précisément  $q_0 = 10$ ) tel que pour tout  $q$  supérieur à 10, il existe une taille  $n_0(q)$  telle que si la taille du cartel n'excède pas  $n_0(q)$ , la première firme de la frange (adjacente à l'entrant) améliore son profit avec l'entrée de la firme E. De plus,  $n_0(q)$  est une fonction croissante de  $q$  (avec  $n_0(q_0) = 3$ ).

**Proposition IV.7**

1)  $m_p \neq \emptyset$

1) Si  $q < 10$  alors  $B_{N+1}(n+1, F_q) < B_N(n+1, F_q)$  pour un grand nombre d'entiers  $n$ .

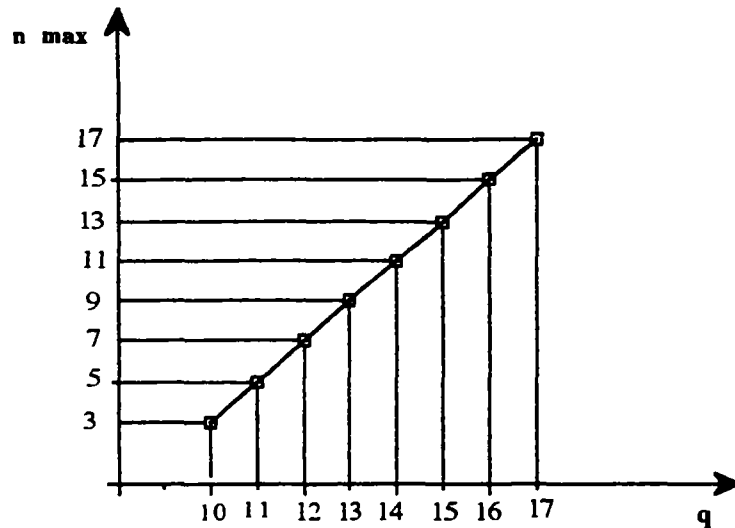
**Preuve:** voir annexe.

A l'aide de différentes valeurs de  $q$  et  $n$  (annexe), on vérifie que si  $q < 10$ ,  $B_{N+1}(n+1, F_q) < B_N(n+1, F_q)$  même pour des valeurs relativement grandes de  $n$  (de  $n=1$  à 50 et même au delà, pour  $n=100, 200$ ). La tendance est donc à l'improfitabilité (pour la première firme de la frange) de l'entrée de E dans le cartel dès que le nombre de firmes à l'extérieur est réduit. Quand la concurrence extérieure n'est pas trop intense, la périphérie de celle-ci préfère un cartel de petite taille à un cartel de grande taille. Pour  $q=10$ , elle améliore son profit à condition que le cartel auquel elle fait face est de taille 2 ou 3. A partir de  $q = 10$ , on voit se dessiner une tendance (pour les valeurs de  $q=11, \dots, 30$ ) qu'on peut résumer ainsi:  $\exists n_0(q) (\geq 3)$  tel que  $n < n_0(q) \Leftrightarrow B_{N+1}(n+1, F_q) > B_N(n+1, F_q)$ .

La fonction  $n_0(q)$  représente la taille maximal du cartel si l'on veut que la première firme de la frange soit avantagée par l'entrée. Cette fonction est aussi la taille du cartel pour laquelle le gain marginal de la firme périphérique de la frange (après entrée de E) est minimal.

De plus,  $n_0(q)$  est croissante par rapport à  $q$ , ce qui signifie qu'à mesure que la concurrence s'intensifie à l'extérieur du cartel, le nombre de concurrents à l'intérieur de celui ci, optimalement désiré par la périphérie de la frange, devient grand. Ce qui apparaît donc déterminant, c'est la taille relative  $n/q$ . Quand cette taille devient grande, l'entrée de E ne profite plus à la firme  $(n+1)$ . La figure IV.11 donne une idée sur les tailles maximales du cartel acceptables (en fonction de  $q$ ) pour que l'entrée de E soit profitable.





**Figure IV.11**  
**Taille maximale du cartel ( fonction de la taille de la frange) rendant possible**  
**l'adjonction d'un nouveau membre**

On remarque (figure IV.12) que la fonction qui à partir de  $q=10$ , associe à  $q$  la taille maximale acceptable par  $(n+1)$ , est simplement la suite des nombres impairs (dont le premier terme est 3).

#### **b- Firme n-1**

Définissons l'ensemble  $m_{(n-1)}$  des couples  $(n,q)$  pour lesquels l'entrée de E dans le cartel engendre une augmentation de profit pour la firme n-1.

$$m_{(n-1)} = \{ (n,q) \in \mathbb{N}^2 / B_{n+1}(n-1, C_n \cup \{E\}) \geq B_N(n-1, C_n) \}$$

Cette firme, qui avait le profit le plus faible dans la situation antérieure cède cette position à la firme n. Nous montrons à travers des exemples que si le nombre  $q$  d'établissements extérieurs au cartel est restreint, la firme n-1 peut améliorer son profit avec l'entrée de E, pourvu que la taille du cartel ne soit pas trop petite.

On montre également l'existence d'un seuil pour  $q$  (précisément  $q=10$ ) au delà duquel la firme n-1 peut être satisfaite de l'entrée de E même pour des tailles très grandes du cartel.

#### **Proposition IV.8**

- 1)  $m_{(n-1)} \neq \emptyset$
- 2)  $\forall q \leq 10, \exists n_1(q)$  tel que  $\forall n < n_1(q), B_{n+1}(n-1, C_n \cup \{E\}) > B_N(n-1, C_n)$ .  
 $n_1(q)$  est une fonction décroissante de  $q$  et  $n_1(10)=2$ .

**Preuve:** (annexe)

L'intérêt de la proposition vient du fait qu'elle permet de mesurer l'incitation qu'ont les firmes les plus défavorisées du cartel à changer de position au sein de ce dernier en favorisant l'augmentation du nombre de leurs concurrents à l'intérieur de celui-ci.

Les deux principes (changer de position et augmenter la taille du cartel) jouent en sens inverse. Si le changement de position de la firme  $n-1$  fait qu'elle n'a plus le statut de la firme la plus défavorisée dans le nouveau cartel (après entrée de  $E$ ), l'augmentation de la taille du cartel d'une unité réduit par contre les parts de marchés des firmes.

Dans quelle mesure interviennent les paramètres  $n$  et  $q$  dans la prédominance de l'un ou l'autre de ces phénomènes dans le profit de  $n-1$ , c'est le sens de la proposition (IV.8).

L'analyse numérique montre que si le nombre de firmes extérieures au cartel est assez élevé, la firme  $n-1$  est satisfaite par l'entrée de  $E$ . On vérifie cette tendance pour la valeur minimale 10 de  $q$  puis pour des valeurs plus grandes  $q=20, 50, 100...$  et en faisant varier  $n$  (voir tableau de valeur en annexe).

Si le nombre de firmes extérieures n'excède pas 9, l'entrée de  $E$  n'est plus profitable à  $n-1$  si le cartel n'est pas assez large. Par exemple, pour  $q=5$ , il faut qu'il soit composé d'au moins 5 firmes pour garantir à  $n-1$  un meilleur profit. Pour  $q=1$ , l'entrée de  $E$  n'est avantageuse que si le cartel contient au moins 8 firmes.

A mesure que la concurrence extérieure devient plus sévère ( $q$  croît), la firme ( $n-1$ ) a intérêt à ce qu'elle ait un concurrent supplémentaire dans le cartel même si elle appartient à un cartel de petite taille.

Ce qui peut rendre l'entrée de  $E$  indésirable pour la firme ( $n-1$ ) sont des combinaisons adéquates de  $q$  et  $n$  dans une industrie de taille relativement réduite ( $N < 12$  précisément).

### **c- Firme $n$**

On considère l'ensemble:

$$m_n = \{ (n, q) \in N^2 / B_{N+1}(n, C_n \cup \{E\}) \geq B_N(n, C_n) \}$$

Même si la firme périphérique ( $n$ ) devient la firme la plus défavorisée avec l'entrée de la firme  $E$  dans le cartel, on montre à l'aide d'exemples, qu'elle peut elle aussi s'accommoder de cette entrée (améliorer son profit) à condition que la taille du cartel ne soit pas trop grande. D'où la proposition:

### **Proposition IV.9**

$$m_n \neq \emptyset$$

**Preuve:** (voir illustratio numériques en annexe).

Il apparaît à la suite de nombreux exemples numériques (illustrés par la figure (IV.12) concernant l'objet de cette proposition (IV.9), que l'importance de la concurrence extérieure (accroissement de  $q$ ) semble accroître à un très faible rythme la valeur maximale de la taille qui perpétue pour la firme périphérique la profitabilité de l'entrée de E.

Par ailleurs, pour que l'entrée de E profite à la périphérie du cartel, il apparaît que la taille relative  $n/q$  doit être très petite.

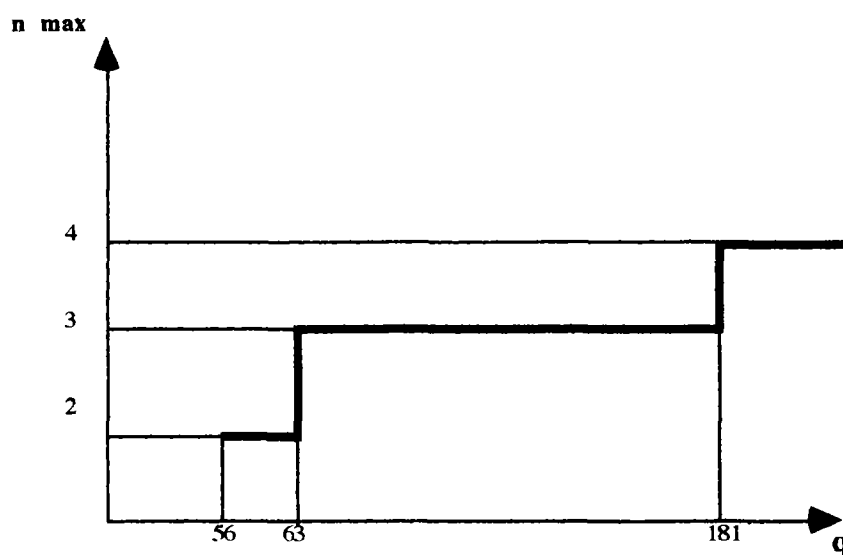


Figure IV.12

Taille maximale du cartel maintenant profitable pour la firme  $n$  l'entrée d'un nouveau membre.

De l'analyse des implications de l'entrée E sur les profits de la firme  $n-1$ ,  $n$  et  $n+1$ , il ressort donc en résumé que ni la périphérie du cartel ( $n$ ), ni celle de la frange n'ont avantage à l'extension du cartel par sa périphérie<sup>12</sup> quand le cartel est déjà suffisamment large par rapport à la frange. Ces deux firmes ont donc un intérêt commun à bloquer toute augmentation de la taille du cartel (du moins par sa périphérie).

La firme ( $n-1$ ) a en général intérêt à favoriser un tel processus surtout si les concurrents extérieurs au cartel sont nombreux.

## Conclusion

Tout au long de cette étude, nous avons mis l'accent sur l'importance de la localisation des établissements de la coalition vis à vis de la concurrence extérieure.

Quand il s'agit de processus de fusion, leur réussite dépend uniquement de leur faculté à générer un surplus de profit global. Néanmoins, nous avons montré que les établissements

<sup>12</sup> Il ne s'agit pas, comme on l'a vu, de l'incorporation dans le cartel d'une firme appartenant à la frange, mais d'une nouvelle firme E.

profitent inégalement de ce surplus. Dans un tel contexte de fusion, cela ne pose pas de problèmes. Mais dès que nous nous devons de postuler une certaine autonomie de ces établissements (contexte de cartellisation), cette inégalité dans les profits joue un rôle primordial dans la réussite de la collusion. Nous avons ainsi mis en évidence l'instabilité de l'accord au regard de la menace de déviation, cette menace provenant principalement des membres du cartel dont la localisation (éventuellement mal servie par le critère (profit joint) adopté) les prédisposent à la "trahison". L'analyse offre un bon test sur la recevabilité du critère de profit joint dans la réussite des cartellisations. On voit de ce fait quelle pourrait être le prolongement intéressant de la réflexion engagée dans ce travail. Il pourrait ainsi s'articuler autour de l'interrogation de base: existe-il pour un cartel un autre critère (fonction des localisations de ses membres) qui stabilise la collusion? Cette question nous semble pertinente, et mériterait une analyse approfondie.

## **ANNEXE**

### **Chapitre I**

#### **1) Demande adressée à un établissement i**

Soit, d'une façon général, un coût de transport  $L(x) = ax^2 + bx$  ( $a > 0$ ).

$\theta_{i,j}$  : abscisse d'un consommateur indifférent entre deux firmes i et j (avec  $x_i < x_j$ ).

Z: la distance (la plus courte) entre les établissements i et j.

$$(a) \quad p_i + a |\theta_{i,j} - x_i|^2 + b |\theta_{i,j} - x_i| = p_j + a |\theta_{i,j} - x_j|^2 + b |\theta_{i,j} - x_j|$$

(a) admet au plus une solution dans  $[0,1]$  (Avec un coût convexe, il y a unicité du consommateur indifférent entre les deux magasins).

Trois cas possibles:

##### **1. $x_j < \theta_{i,j}$**

l'établissement i affiche un prix faible par rapport à celui de j si bien que les consommateurs au voisinage de j sont clients de l'établissement i.

De (a):

$$(b) \quad \theta_{i,j}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_j - p_i}{a Z_{i,j}} - \frac{b}{a} + (x_i + x_j) \right\}$$

$$\theta_{i,j}^1 \geq x_j \Leftrightarrow p_i \leq p_j - Z_{i,j} (a Z_{i,j} + b)$$

##### **2. $x_i < \theta_{i,j} < x_j$**

Le consommateur est localisé entre i et j.

$$(c) \quad \theta_{i,j}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_j - p_i}{a Z_{i,j} + b} + (x_i + x_j) \right\}$$

$$x_i \leq \theta_{i,j}^2 \leq x_j \Leftrightarrow p_j - Z_{i,j} (a Z_{i,j} + b) \leq p_i \leq p_j + Z_{i,j} (a Z_{i,j} + b)$$

##### **3. $\theta_{i,j} < x_i$**

Cas symétrique de 1, le prix affiché par i est élevé par rapport à celui de j.

$$(d) \quad \theta_{i,j}^3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_j - p_i}{a Z_{i,j}} + \frac{b}{a} + (x_i + x_j) \right\}$$

$$\theta_{i,j}^3 \leq x_i \Leftrightarrow p_i \geq p_j + Z_{i,j} (a Z_{i,j} + b)$$

Dans le cas où  $b=0$ :

$$\theta_{i,j} = \theta_{i,j}^1 = \theta_{i,j}^2 = \theta_{i,j}^3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_j - p_i}{a Z_{i,j}} + x_i + x_j \right\}$$

Soit un nombre  $N_a$  d'établissements installés sur le marché (dépendant de la valeur du coût de transport, et donc de  $a$  ( $b$  étant nul)), la part de marché de tout magasin  $i$  s'écrira pour tout triplet de prix  $(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})$ :

$$(e) \quad D_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = \theta_{i,i+1} - \theta_{i,i-1} = \frac{1}{2a} \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{Z_{i,i+1}} - \frac{p_i - p_{i-1}}{Z_{i-1,i}} + a Z_{i-1,i+1} \right)$$

Les seuls concurrents d'un magasin  $i$  sont  $i-1$  et  $i+1$  sans quoi la part de marché de l'un de ces deux magasins serait nulle à l'équilibre.

Le coût quadratique garantit la concavité de la fonction de profit quelque soit la position du consommateur indifférent entre les établissements.

## **Chapitre IV.**

**Tableau IV.1:**

Avantage retiré par la périphérie de la frange de l'entrée de  $E$  dans le cartel.

$n$	$B_{n+2}^E - B_{n+1}^{(f,n)}$ $q=20$	$B_{n+2}^E - B_{n+1}^{(f,n)}$ $q=10$	$B_{n+2}^E - B_{n+1}^{(f,n)}$ $q=1$
02	+ 1,50. 10 <sup>-5</sup>	+ 8,79. 10 <sup>-7</sup>	- 0,0220
03	+ 1,41. 10 <sup>-5</sup>	+ 7,97. 10 <sup>-6</sup>	- 0,0110
04	+ 1,26. 10 <sup>-5</sup>	- 4,74. 10 <sup>-6</sup>	- 0,0060
05	+ 1,12. 10 <sup>-5</sup>	- 8,55. 10 <sup>-5</sup>	- 0,0044
06	+ 9,93. 10 <sup>-6</sup>	- 1,11. 10 <sup>-5</sup>	-0,00310
07	+ 8,70. 10 <sup>-6</sup>	- 1,20. 10 <sup>-5</sup>	< 0
08	+ 7,60. 10 <sup>-6</sup>	- 1,39. 10 <sup>-5</sup>	< 0

09	$+ 6,60. 10^{-6}$	$- 1,45. 10^{-5}$	$< 0$
10	$+ 5,70. 10^{-6}$	$- 1,49. 10^{-5}$	$< 0$
50	$-1,38. 10^{-6}$	$- 4,68. 10^{-6}$	$< 0$
200	$< 0$	$- 1,64. 10^{-7}$	$< 0$
300	$< 0$	$- 2,32. 10^{-7}$	$< 0$
1000	$< 0$	$- 2,30. 10^{-8}$	$< 0$

**Tableau IV.2:**

Avantage retiré par la firme n-1 de l'entrée de E dans le cartel.

n	$B_{n-1}^E - B_{n-1}^{(c,n)}$ q=1	$B_{n-1}^E - B_{n-1}^{(c,n)}$ q=20	$B_{n-1}^E - B_{n-1}^{(c,n)}$ q=100
02	$- 126. 10^{-2}$	$+ 1,44. 10^{-5}$	$+ 2,42. 10$
03	$- 613. 10^{-2}$	$+ 2,58. 10^{-5}$	$+ 4,44. 10$
04	$- 280. 10^{-2}$	$+ 3,49. 10^{-5}$	$+ 6,34. 10$
05	$- 126. 10^{-2}$	$+ 4,20. 10^{-5}$	$+ 8,13. 10$
06	$- 443. 10^{-3}$	$+ 4,75. 10^{-5}$	$+ 9,80. 10$
07	$- 826. 10^{-6}$	$+ 5,18. 10^{-5}$	$+ 1,14. 10$

## **References**

- **Archinard G. et B. Guerrien [1988]:** "Analyse mathématique pour économistes". Edition Economica, Paris.
- **Aumann, R.J.[1973]:** "Desavantageous monopolies". Journal of Economic Theory 6, 1-11.
- **Bonnano, G. [1987]:** " Location Choice, Product Proliferation and Entry Deterrence". Review of Economic Studies 54, 37-45.
- **D'Aspremont C.; J. Gabszewicz et J. Thisse [1979]:** "On Hotelling's stability in competition". Econometrica , 47, 41-57.
- **D'Aspremont C.; A. Jacquemin; J. Gabszewicz et Weymark J. [1983]:** "On the stability of collusive price leadership". Canadian journal of Economics, 26, 17-25.
- **Chang M. [1991]:** "The effect of product differentiation on collusive pricing". International Journal of Industrial Organisation, 9, 453-469.
- **Cramton P.C.et T.R. Palfrey [1986]:** "Cartel enforcement with uncertainty about costs". Working papers, 37, working paper series D, Yale School of Organisation and Management.
- **Davidson C et R. Deneckere [1984]:** "Horizontal mergers and collusive behavior". International journal of industrial organisation , 2, 117-132.
- **Davidson K. [1983]:** "The competitive significance of segmented markets". California Law Review, 71, 445-463.
- **Deneckere R. et C. Davidson [1985]:** "Incentives to form coalitions with Bertrand competition". Rand journal of Economics 16, 473-486.
- **Donsimoni M.P.[1985]:** "Stable heterogeneous cartels". International journal of Industrial organization, 3, 451- 467.



- **Donsimoni M.P.; N. Economides et H.M. Polemarchakis [1986]:** "Stable cartels". *International Economic Review*, 27, n°2, 317-327.
  
- **Donsimoni M.P. et B. MacLeod [1984]:** "Stable leadership". Discussion paper, 8421 (CORE, Université catholique de Louvain, Louvain).
  
- **Gilbert, R. et X. Vives [1986]:** "Entry deterrence and the free rider problem". *Review of Economic Studies*, 172, 71-83.
  
- **Hotelling H.[1929]:** "Stability in competition" *Economic journal*, 39.
  
- **Kihlstrom R.E. et X.Vives [1988]:** "Collusion by asymmetrically informed duopolist". *European Journal of Political Economy*.
  
- **Markham J.W. [1951]:** "The Nature and Significance of Price-Leadership". *American Economic Review*, 41, 891-905.
  
- **Osborne D. [1976]:** "Cartel problems". *American Economic Review*, 66, 835-844.
  
- **Porter R. [1983]:** "A study of cartel stability: the joint economic committee 1880-1886". *Bell Journal of Economics*, 14, 301-314.
  
- **Posner R. [1976]:** "Antitrust Law". University of Chicago Press, Chicago, IL.
  
- **Postlewaite A. et J. Roberts [1977]:** "A note on the stability of large cartels". *Econometrica* 45, 1877-1878.
  
- **Ross T.W. [1992]:** "Cartel stability and product differentiation". *International Journal of Industrial Organisation*, 10, 1-13.
  
- **Salant S.; S. Switzer et R. Reynolds [1983]:** "Losses from horizontal merger: The effects of an exogenous change in industry structure on Cournot-Nash equilibria". *Quarterly journal of Economics*, 98, 185-199.
  
- **Salop S.[1979]:** "Monopolistic competition with outside goods". *Bell Journal of Economics*, 10, 141-156.
  
- **Schelling T.[1970]:** "The strategy of conflict". Harvard University Press.

- **Schmalensee, R.[1978]:** "Entry deterrence in the ready-to-eat breaffast cereal industry". Bell Journal of Economics 9, 305-327.
- **Selten, R. [1975]:** "Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games". International Journal of Game Theory 4, 25-55.
- **Stigler G. [1950]:** "Monopoly and oligopoly by merger". American Economic Review, 40,23-34.
- **Stigler G. [1966]:** "The theory of price". University of Chicago, Chicago, IL.